

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
Faza locală
Braşov, 9 februarie 2024

Clasa a IX-a

1. Fie numerele reale strict pozitive $a_1, a_2, \dots, a_n$, astfel încât $\frac{a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_k^2}{a_1 + a_2 + \dots + a_k} = \frac{2k+1}{3}$, pentru oricare $k \in \{1, 2, \dots, n\}$. Demonstrați că $a_1^3 + a_2^3 + \dots + a_n^3 = (a_1 + a_2 + \dots + a_n)^2$.

Romeo Ilie

2. Arătați că:

- (a) $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \geq \frac{4}{x+y}$, pentru oricare $x, y > 0$;
- (b) $\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} \geq \frac{2(a+b)}{a+b+2c}$, pentru oricare $a, b, c > 0$.

Ovidiu Pop

3. Fie $ABCD$ un paralelogram și punctele $M \in (AB)$, $N \in (BC)$, $P \in (CD)$ astfel încât $\overrightarrow{AM} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BN} = \frac{5}{6}\overrightarrow{BC}$ și $\overrightarrow{DP} = \frac{1}{6}\overrightarrow{DC}$. Arătați că centrul de greutate al triunghiului MNP se află pe dreapta AC .

Gazeta Matematică

4. (a) Demonstrați identitatea: $[x] + [x + \frac{1}{2}] = [2x]$, pentru oricare $x \in \mathbb{R}$.
- (b) Rezolvați ecuația: $[x + \frac{1}{2}] + [2x + \frac{1}{2}] + [4x + \frac{1}{2}] + [8x + \frac{1}{2}] + \dots + [2^{100}x + \frac{1}{2}] = 0$.
($[a]$ reprezintă partea întreagă a numărului real a)

Florin Cârstea

Notă. Toate subiectele sunt obligatorii. Fiecare subiect valorează 7 puncte.
Timp de lucru 3 ore.