



Olimpiada Națională de Matematică 2017

Etapa locală – Iași, 24 februarie 2017

CLASA a XI a

- 1) Determinați parametrii $a, b, c \in \mathbf{R}$ astfel încât $\lim_{x \rightarrow \infty} x(\sqrt{ax^2 + bx + c} - 2x - 3) = 2017$
- 2) a) Fie $\lambda \in \mathbf{R}$ cu $|\lambda| < 1$ și considerăm șirul de numere reale $(a_n)_{n \geq 1}$. Demonstrați că, dacă șirul $(a_{n+1} - \lambda a_n)_{n \geq 1}$ este convergent la $l \in \mathbf{R}$, atunci șirul $(a_n)_{n \geq 1}$ este convergent și are limita egală cu $\frac{l}{1 - \lambda}$.
- b) Fie $(x_n)_{n \geq 1}$ un șir de numere reale cu proprietatea că șirul $(y_n)_{n \geq 1}$ definit prin $y_n = 9x_{n+2} - 12x_{n+1} + 4x_n, \forall n \geq 1$, este convergent. Demonstrați că $(x_n)_{n \geq 1}$ este convergent.
- 3) Fie $A, B \in M_n(\mathbf{R})$ astfel încât $A^3 = AB^2 - BA^2$ și $B^3 = -I_n$. Arătați că:
- a) Matricea $C = A^2 - B^2$ este inversabilă.
- b) $A^3 B = BA^3$.
- 4) Se consideră matricele $A, B \in M_2(\mathbf{R})$ care îndeplinesc următoarele condiții:
- (1) $\det(A + 2016 \cdot B) = \det(2016 \cdot A + B)$ și
- (2) $\det(A + 2017 \cdot B) = \det(2017 \cdot A + B)$
- Să se demonstreze că $\det A = \det B$.

Timp de lucru: 3 ore.

Fiecare problemă este notată cu 7 puncte.