S.S.M.R - FILIALA MURES

Olimpiada de matematică
Faza locală 9.02.2013
Clasa a IX a
Barem de evaluare

Subiectul I.

1. a) Fie $n \in \mathbf{N}$. Să se arate că $\left(1+\frac{1}{n}\right)^k < 1+\frac{k}{n}+\frac{k^2}{n^2}$, $\forall k \in N^*$, $k \le n.$

   b) Să se aratecă $2^n + 1 < 2^{n+\frac{1}{2^{n-1}}}$, $\forall n \in N^*$.

Solutie

1p oficiu

a) Se arată prin inductie matematică după k ……………………………………………..3p

b) $2^n + 1 < 2^{n+\frac{1}{2^{n-1}}} \Leftrightarrow 1 < 2^n\left(2^{\frac{1}{2^{n-1}}} - 1\right) \Leftrightarrow \frac{1}{2^n} < 2^{\frac{1}{2^{n-1}}} - 1 \Leftrightarrow 1+\frac{1}{2^n} < 2^{\frac{1}{2^{n-1}}} \Leftrightarrow \left(1+\frac{1}{2^n}\right)^{2^{n-1}} < 2.$ ...2p

Aplicând a) rezultă $\left(1+\frac{1}{2^n}\right)^{2^{n-1}} < 1+\frac{2^{n-1}}{2^n}+\frac{2^{2n-2}}{2^{2n}} = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4} < 2.$…………………………...1p

Subiectul II.

Să se rezolve în ℝ ecuatia

$x-1\ +\ x-2\ +\ x-3\ +\cdots+\ x-2013\ = 2012\ x-2010$.

Solutie

1p oficiu

Deoarece membrul stâng al ecuaț iei este o sumă de numere pozitive $\Rightarrow$ conditia $x-2010 \ge 0 \Rightarrow$ $x \ge 2010$, ceea ce conduce la $x-n\ = x-n$ pt $n \le 2009$……………………………… 1p

Se disting cazurile 1. Pentru $x < 2010$ ecuatia nu are solutii……………….……………… 1p

2. $2010 \le x \le 2011$ cu soluț ia $x = 405820{,}2 \notin\ 2010,\infty$ ..…………... 1p

3. $2011 < x \le 2012$cu soluț ia $x = 6750261,(3) \notin\ 2010,\infty$ ………… 1p

4. $2012 < x \le 2013$cusoluț ia $x = 6075234 \notin\ 2010,\infty$ ……………... 1p

5. $x \ge 2013$ cu soluț ia $x = -2017029 \notin\ 2010,\infty$ …………………….1p

Subiectul III

Se consideră un triunghi ABC si D,E,F intersectiile medianelor din A, B, respectiv C cu cercul circumscris triunghiului . Să se arate că dacă $_{AD} + _{BE} + _{CF} = _{0}$, atunci triunghiul ABC este echilateral.

Pentru orice altă rezolvare corectă se acordă punctaj maxim

Solutie:

1p oficiu

Notăm cu M,N,P mijloacele laturilor BC,CA, respectiv AB. Din asemănarea triunghiurilor MAB ș i MCD rezultă:

$MD \cdot MA = MB \cdot MC = \frac{a^2}{4}$ unde BC=a. Atunci:………………………………………2p

$$\frac{MD}{MA} = \frac{MD \cdot MA}{MA^2} = \frac{a^2}{4MA^2} = \frac{a^2}{2b^2+2c^2-a^2} \text{ și } \frac{AD}{AM} = \frac{2b^2+2c^2}{2b^2+2c^2-a^2}$$

Prin urmare ${}_{AD} = \frac{2b^2+2c^2}{2b^2+2c^2-a^2}\,{}_{AM}$ ș i analoagele………………………………………..2p

Cum ${}_{AD} + {}_{BE} + {}_{CF} = {}_{0}$ ș i ${}_{AM} + {}_{BN} + {}_{CP} = {}_{0}$, rezultă:

$$\frac{2b^2+2c^2}{2b^2+2c^2-a^2} = \frac{2c^2+2a^2}{2c^2+2a^2-b^2} = \frac{2a^2+2b^2}{2a^2+2b^2-c^2}$$

de unde a=b=c, ceea ce trebuia demonstrat……………………………………………..2p

Subiectul IV.

În paralelogramul *ABCD* fie $BM = \frac{2}{3}BA$, $AN = \frac{1}{4}AD$, $CM \cap BN = T$.

a) Calculați valoarea raportului $\frac{BT}{BN}$.

b) Dacă $BD \cap CM = P$, demonstrați, că dreptele *AP*, *BN*, *DM* sunt concurente.

Solutie

1p oficiu

a. Fie construcția ajutătoare:
CM ∩ AD = {S}
AM ||DC ⇒Δ SAM ~Δ SDC ⇒$\frac{SA}{SD} = \frac{AM}{DC} = \frac{1}{3}$⇒$\frac{SA}{SN} = \frac{2}{3}$...1p
În Δ ABN aplicăm teorema lui Menelaos cu secanta T,M,S
⇒$\frac{BT}{TN} = \frac{4}{3}$⇒$\frac{BT}{BN} = \frac{4}{7}$...2p

b. CB||DS⇒Δ PBC~Δ PDS⇒$\frac{\mathrm{PB}}{\mathrm{PD}} = \frac{CB}{\mathrm{DS}} = \frac{2}{3}$ 1p
În ΔABD aplicăm reciproca teoremei lui Ceva $\frac{AM}{MB} \cdot \frac{BP}{PD} \cdot \frac{DN}{NA} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{1} = 1$
⇒dreptele AP, DM şi BN sunt concurente..2p