

Olimpiada națională de matematică

etapa locală, 16.02.2019

Clasa a IX-a

1. a) Demonstrați egalitatea $[a] + \left[a + \frac{1}{2}\right] = [2a]$ (identitatea lui Hermite).

b) Rezolvați, în $\mathbb{R}$, ecuația $\left[\frac{6x+2}{3}\right] - \left[\frac{6x+5}{6}\right] = \frac{5x+3}{4}$.

prof. Călin Popescu

2. Arătați că $\frac{x^2-2x+5}{x-1} + \frac{y^2-2y+10}{y-1} + \frac{z^2-2z+17}{z-1} \geq 18, \forall x, y, z \in (1, +\infty)$.

prof. Călin Popescu

3. Fie $(x_n)_{n \geq 1}$ un șir definit prin: $x_1 = \frac{1}{4}$ și $\sqrt{x_{n+1}} + \sqrt{x_n} = \frac{2}{n^2 + 2n}, \forall n \geq 1$.

Să se calculeze suma $S_n = \sum_{k=1}^n (2k+1)x_k$ și să se arate că $S_n < 1, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

prof. Traian Tămâian

4. Fie ABCDE un pentagon convex și punctele P, Q astfel încât $\overrightarrow{CE} = 3\overrightarrow{CP}$ și $\overrightarrow{CA} = 3\overrightarrow{CQ}$.

Dacă M, N sunt respectiv centrele de greutate ale triunghiurilor ABD, BED , să se arate că patrulaterul $MNPQ$ este paralelogram.

prof. Traian Tămâian

Notă: Timp de lucru 3 ore.

Rezolvarea fiecărei probleme este obligatorie.

SUCCESE!

Olimpiada națională de matematică

etapa locală, 16.02.2019

Clasa a IX-a

1. Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuațiile:

a) $|x^2 - 2020x + 2019| + |x - 1| - 2019|x - 2019| = 2019$

b) $[x + 2017] + \{x + 2018\} = [2019 + 2x]$, unde prin $[a]$ și $\{a\}$ am notat partea întreagă și respectiv partea fracționară a numărului real a .

Prof. Traian Tămâian

2. Să se determine $x, y \in (0, \infty)$ știind că $xy = 1$ și $\frac{1}{\sqrt{1+x}} + \frac{1}{\sqrt{1+y}} = \sqrt{x+y}$.

Prof. Traian Tămâian

3. 1. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{Z}$, $y = f(x)$, astfel încât $y - 2019x \leq 0$ și

$$y - 2019x + 1 > 0.$$

a) Calculați

$$f\left(\frac{2018}{2019}\right)$$

b) Rezolvați ecuația $f(x) = 1 + 2 + 3 + \dots + 2019$

prof. Pop Marius

4. Fie ABCD un patrulater în care $CD \cap AB = \{E\}$ și $AD \cap BC = \{F\}$, $A \in [BE]$, $C \in [BF]$. Construim punctele $M \in (EA)$, $N \in (FC)$, $P \in (FD)$ și $Q \in (EC)$ astfel încât $\frac{EM}{AB} = \frac{FN}{BC} = \frac{FP}{AD} = \frac{EQ}{CD} = k > 0$. Demonstrați că punctele M, N, P și Q sunt vârfurile unui paralelogram.

prof. Fărcaș Mircea

Notă: Timp de lucru 3 ore.

Rezolvarea fiecărei probleme este obligatorie.

SUCCESE!



Olimpiada națională de matematică

etapa locală, 16.02.2019

Clasa a X-a

1. Fie $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$ cu proprietatea $|z_1| = |z_2| = |z_3| = 1$ și $z_1 + z_2 + z_3 = 1$.

Să se calculeze suma $z_1^{2019} + z_2^{2019} + z_3^{2019}$.

prof. Koczinger Éva

2. Aflați $n \in \mathbb{N}^*$ pentru care $\sqrt[n]{17\sqrt{5} + 38} - \sqrt[n]{17\sqrt{5} - 38} = 4$.

prof. Popescu Călin

3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\log_5(1 + \sqrt[3]{x}) = \log_2 \sqrt[6]{x}$.

prof. Galambosi Csaba

4. Pe laturile $(BC), (CD), (DA), (AB)$ ale patrulaterului convex $ABCD$ se consideră respectiv punctele A_1, B_1, C_1, D_1 astfel încât $\frac{A_1B}{A_1C} = \frac{B_1C}{B_1D} = \frac{C_1D}{C_1A} = \frac{D_1A}{D_1B}$. Dacă M, N, P, Q sunt respectiv mijloacele segmentelor $[AA_1], [BB_1], [CC_1], [DD_1]$, arătați că $MNPQ$ este paralelogram dacă și numai dacă $ABCD$ este paralelogram.

prof. Tămâian Traian

Notă: Timp de lucru 3 ore.

Rezolvarea fiecărei probleme este obligatorie.

SUCCES!



Olimpiada națională de matematică

etapa locală, 16.02.2019

Clasa a X-a

1. a) Demonstrați că pentru orice $x, y \in (0, \infty)$ are loc echivalența

$$\lg \frac{x+y}{2} = \frac{\lg x + \lg y}{2} \Leftrightarrow x = y$$

- b) Demonstrați că pentru orice $x, y \in (0, \infty)$ are loc echivalența

$$x^2 + y^2 = 2023xy \Leftrightarrow \lg \frac{x+y}{45} = \frac{\lg x + \lg y}{2}$$

prof. Forgács István

2. Fie $z, z' \in \mathbb{C}^*$ astfel încât $|zz'| + zz' \neq 0$.

Să se arate că dacă $\frac{z+z'}{|zz'|+zz'} \in \mathbb{R}$, atunci $|z|=|z'|$ sau $\frac{z}{|z|} = \frac{z'}{|z'|}$.

prof. Pop Ovidiu

3. Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $2^x + 15^x + 30^x = 3^x + 6^x + 10^x$.

prof. Tămâian Traian

4. Pe laturile AB , BC și CA ale triunghiului ABC se construiesc, în exteriorul triunghiului, pentagoanele regulate $ABDEF$, $BCGHI$ și $CALKJ$. Notăm cu A_1 , B_1 și C_1 mijloacele segmentelor FL , DI și respectiv GJ . Arătați că triunghiurile ABC și $A_1B_1C_1$ au același centru de greutate.

prof. Braica Petru

Notă: Timp de lucru 3 ore.

Rezolvarea fiecărei probleme este obligatorie.

SUCCESE!



Olimpiada națională de matematică

etapa locală, 16.02.2019

Clasa a XI-a

1. a) Fie $n \in \mathbb{N}^*$, $n \geq 2$. Dați exemplul de matrice $A \in M_n(\mathbb{C})$ astfel încât $A^4 + I_n = O_n$
b) Fie matricele $A, B \in M_2(\mathbb{C})$ astfel încât $(AB)^2 = (BA)^2$. Să se arate că dacă $\text{Tr}(AB) \neq 0$ atunci $AB = BA$. Reciproca este adevărată?

prof. Petru Braica
prof. Ovidiu Pop

2. a) Fie $A \in M_2(\mathbb{C})$. Arătați că $\det(A - xI_2) = x^2 - (\text{Tr}A)x + \det A$, pentru orice $x \in \mathbb{C}$.
b) Dacă $A \in M_2(\mathbb{C})$ cu $\text{Tr}A = 2$ și $\det A = 3$ demonstrați că
$$\sqrt{3 \cdot \det(A^2 + 3I_2)} - \sqrt{2 \cdot \det(A^2 + I_2)} = 2.$$

prof. Traian Tămâian

3. Fie $(a_n)_{n \geq 1}$ un șir definit prin $a_1 = \sqrt{2}$ și $a_{n+1} = \frac{a_n^2 + 2}{3}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.
a) Arătați că șirul $(a_n)_{n \geq 1}$ este monoton și $1 \leq a_n \leq 2$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$
b) Calculați $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ și $\lim_{n \rightarrow \infty} n(a_n - 1)$.

prof. Traian Tămâian

4. a) Calculați $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^k x}{x^2}$, $k \in \mathbb{N}^*$.
b) Dacă $n \in \mathbb{N}^*$, calculați $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \cos x)(1 - \cos^2 x) \cdots (1 - \cos^n x)}{\sin^{2n} x + \ln(1 + x^{2n}) + \sqrt[n]{1 + x^{2n}} - 1}$.

prof. Traian Tămâian

Notă: Timp de lucru 3 ore.

Rezolvarea fiecărei probleme este obligatorie.

SUCCES!



Olimpiada națională de matematică

etapa locală, 16.02.2019

Clasa a XI-a

1. Fie $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$ și $t_n = \text{tr}(A^n)$, $(\forall) n \in \mathbb{N}^*$.

a) Demonstrați că $t_{n+2} = 7t_{n+1} - 10t_n$, $(\forall) n \in \mathbb{N}^*$.

b) Calculați $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{t_n}{5^n} \right)^{\frac{t_n}{2^n}}$.

prof. Galambosi Csaba

2. a) Fie $A \in M_2(\mathbb{C})$. Arătați că $\det(A - xI_2) = x^2 - (\text{Tr}A)x + \det A$, pentru orice $x \in \mathbb{C}$.

b) Dacă $A \in M_2(\mathbb{C})$ cu $\text{Tr}A = 2$ și $\det A = 3$ demonstrați că $\det(A^4 + 4A^2 + 3I_2) = 96$.

prof. Traian Tămâian

3. a) Calculați $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2}{10} + \frac{1}{1000} + \frac{9}{10000} + \dots + \frac{2}{10^{4n+1}} + \frac{1}{10^{4n+3}} + \frac{9}{10^{4n+4}} \right)$

b) Să se calculeze $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^2} + \ln^4(1 + \sqrt{x}) - \sqrt[2020]{1 + \sin^2 x}}{x^2}$

prof. Papp Czier Levente

prof. Traian Tămâian

4. Fie șirul $a_n = \frac{(n+3)^2 + 3}{n(n+1)(n+2)} \cdot \frac{1}{2^{n+1}}$, $n \in \mathbb{N}^*$ și funcția $f: \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(n) = \frac{nA+B}{n(n+1)} \cdot \frac{1}{2^n}, A, B \in \mathbb{R}.$$

a) Determinați A și B astfel încât $a_n = f(n) - f(n+1)$, $n \in \mathbb{N}^*$

b) Dacă $b_n = \sum_{k=1}^n a_k$, $n \in \mathbb{N}^*$, calculați $\lim_{n \rightarrow \infty} (b_n)^{n \cdot 2^n}$.

prof. Cziprok Andrei

Notă: Timp de lucru 3 ore.

Rezolvarea fiecărei probleme este obligatorie.

SUCCES!



Olimpiada națională de matematică

etapa locală, 16.02.2019

Clasa a XII-a

1. Calculați :

$$\int \frac{\cos x}{3 \cdot \sin x - 4 \cdot \cos x + 5} dx, x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right).$$

prof. Cziprok Andrei, Colegiul Național „Kölcsey Ferenc” Satu Mare

2. Să se determine funcția derivabilă $f: [1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ care îndeplinește condițiile
 $xf(x) + x^2 f'(x) = x \ln x + x - 1, \forall x \in [1, +\infty)$ și $f(1) = 0$.

prof. Călin Popescu, Colegiul Național „Ioan Slavici”, Satu Mare

3.

Se consideră șirul $(I_n)_{n \geq 1}$ definit prin $I_1 = 0$ și $I_n = \int_1^n \frac{\arctg \frac{x}{\sqrt{n}}}{x^2 + n} dx, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq 2$.

Să se calculeze I_{2019} și să se demonstreze că $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n} \cdot I_n) = \frac{\pi^2}{8}$.

prof. Traian Tămâian, Liceul Teoretic Carei

4. Fie $(G, \cdot)$ un grup finit, cu un număr impar de elemente. Demonstrați că funcția $f: G \rightarrow G$,

$f(x) = x^2$ este bijectivă.

prof. Mircea Fărcaș, Colegiul Național „Mihai Eminescu”, Satu Mare.

Notă: Timp de lucru 3 ore.

Rezolvarea fiecărei probleme este obligatorie.

SUCCES!



Olimpiada națională de matematică

etapa locală, 16.02.2019

Clasa a XII-a

1. Calculați:

$$\int \frac{\sin x}{\cos x + 2019 \cdot \sin x} dx, x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right).$$

prof. Forgács István, Colegiul Național „Kölcsey Ferenc”, Satu Mare

2. Fie funcția $f : (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$ derivabilă, care are o primitivă F care satisface relația:

$$2 \cdot (F(x) - f(x)) = f^2(x) \quad \forall x > 0.$$

a) Să se arate că f este strict crescătoare și convexă pe $(0, \infty)$.

b) Să se calculeze $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x}$.

prof. Kóczinger Éva, Liceul Teologic Romano-Catolic „Hám János”, Satu Mare

3.

Se consideră șirul $(I_n)_{n \geq 1}$ definit prin $I_1 = 0$ și $I_n = \int_1^n \frac{\ln x}{x^2 + n} dx, \quad \forall n \in \mathbb{N}, n \geq 2$.

Să se calculeze I_{2019} și să se demonstreze că $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\sqrt{n}}{\ln n} I_n \right) = \frac{\pi}{4}$.

prof. Traian Tămâian, Liceul Teoretic Carei

4.

Fie $(G, \cdot)$ un grup comutativ. Funcția $f: G \rightarrow G$ verifică egalitatea $f(x \cdot f(y)) = y \cdot f(x), \quad \forall x, y \in G$ dacă și numai dacă $f^2 = 1_G$ și f este endomorfism al grupului $(G, \cdot)$.

prof. dr. Ovidiu Pop, Colegiul Național „Mihai Eminescu”, Satu Mare.

Notă: Timp de lucru 3 ore.

Rezolvarea fiecărei probleme este obligatorie.

SUCCES!