



Olimpiada Națională de Matematică

Etapa Locală, 23 februarie 2020

Clasa a VI-a

Problema 1

Determinați numerele de forma $\overline{xy}$ a.î $\overline{xy56} + \overline{4xy} : \overline{xy}$.

Problema 2

Arătați că numărul $A = 8^{2018} + 18^{2018} + 28^{2018} + \dots + 2018^{2018}$ nu este pătrat perfect.

Gazeta Matematică nr. 10/2018

Problema 3

În jurul punctului O formăm unghiuri cu următoarele măsuri:

$$m(\angle XO X_1) = 1^\circ, m(\angle X_1 O X_2) = 2^\circ, m(\angle X_2 O X_3) = 3^\circ, m(\angle X_3 O X_4) = 4^\circ, \dots, m(\angle X_{n-1} O X_n) = n^\circ$$

și $m(\angle X_n O X) = t^\circ$, unde $n, t \in \mathbb{N}$

a) Aflați valoarea maximă a lui n și $m(\angle X_n O X) = t^\circ$

b) Demonstrați că semidreptele (OX_5) și (OX_{14}) sunt perpendiculare, în situația când numărul natural n este maxim

Problema 4

Suma a 10 numere raționale este 50. Ele sunt invers proporționale cu numerele 2; 6; 12; ...; 110. Câte dintre aceste numere sunt fracții subunitare?

**Notă: Timp de lucru: 2 ore Toate subiectele sunt obligatorii Fiecare subiect se notează de la 0 la 7
Nu se acordă puncte din oficiu**



Barem de notare clasa a VI-a

Problema 1

Determinați numerele de forma $\overline{xy}$ a.î $\overline{xy56} + \overline{4xy} : \overline{xy}$.

Rezolvare

$$(\overline{xy00} + 56 + 400 + \overline{xy}) : \overline{xy} \rightarrow (\overline{xyxy} + 456) : \overline{xy} \rightarrow \overline{xy} | 456$$

.....4p

$\overline{xy} \in \{12, 19, 24, 38, 57, 76\}$ 3p

Problema 2 .

Arătați că numărul $A = 8^{2018} + 18^{2018} + 28^{2018} + \dots + 2018^{2018}$ nu este pătrat perfect.

Gazeta Matematică nr. 10/2018

Rezolvare

Numărul de termeni = $(2018 - 8) : 10 + 1 = 202$(2p)

Ultima cifră a celor 202 termeni este aceeași, adică 4.....(3p)

Ultima cifră a numărului A este 8, deci nu poate fi pătrat perfect..... (2p)

Problema 3 .

În jurul punctului O formăm unghiuri cu următoarele măsuri:

$$m(\angle XO X_1) = 1^\circ, m(\angle X_1 O X_2) = 2^\circ, m(\angle X_2 O X_3) = 3^\circ, m(\angle X_3 O X_4) = 4^\circ, \dots, m(\angle X_{n-1} O X_n) = n^\circ$$

și $m(\angle X_n O X) = t^\circ$, unde $n, t \in \mathbb{N}$

a) Aflați valoarea maximă a lui n și $m(\angle X_n O X) = t^\circ$

b) Demonstrați că semidreptele (OX_5) și (OX_{14}) sunt perpendiculare, în situația când numărul natural n este maxim



Rezolvare

a)

Suma măsurilor unghiurilor în jurul unui punct este 360° .

$$1^\circ + 2^\circ + 3^\circ + 4^\circ + \dots + n^\circ + t^\circ = 360^\circ \dots\dots\dots 1p$$

$$Sn + t^\circ = 360^\circ \Rightarrow Sn \leq 360^\circ \dots\dots\dots 1p$$

$$n(n+1) : 2 \leq 360^\circ \Rightarrow n(n+1) \leq 720^\circ \dots\dots\dots 1p$$

Din $n = \text{maxim}$, n și $n + 1$ consecutive, obținem $n = 26^\circ$, $n + 1 = 27^\circ \dots\dots\dots 1p$

$$m(\sphericalangle X_n O X) = 360^\circ - 351^\circ = 9^\circ \dots\dots\dots 1p$$

b)

$$m(\sphericalangle X_5 O X_{14}) = m(\sphericalangle X_5 O X_6) + m(\sphericalangle X_6 O X_7) + m(\sphericalangle X_7 O X_8) + \dots + m(\sphericalangle X_{13} O X_{14}) \dots\dots\dots 1p$$

$$m(\sphericalangle X_5 O X_{14}) = 6^\circ + 7^\circ + 8^\circ + \dots + 14^\circ = 90^\circ, \text{ deci } (OX_5 \perp OX_{14}) \dots\dots\dots 1p$$

Problema 4 .

Suma a 10 numere raționale este 50. Ele sunt invers proporționale cu numerele 2; 6; 12; ...; 110. Câte dintre aceste numere sunt fracții subunitare?

Rezolvare

$$\frac{x_1}{\frac{1}{2}} = \frac{x_2}{\frac{1}{6}} = \frac{x_3}{\frac{1}{12}} = \dots = \frac{x_{10}}{\frac{1}{110}} \dots\dots\dots 2p$$

$$\frac{50}{\frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \dots + \frac{1}{10.11}} = \frac{50}{\frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{10} - \frac{1}{11}} = \frac{50}{\frac{10}{11}} = 55 \dots\dots 3p$$

Sunt 4 fracții subunitare: $x_7, x_8, x_9, x_{10} \dots\dots\dots 2p$