INSPECTORATUL ŞCOLAR JUDEŢEAN
BRĂILA
OLIMPIADA NAŢIONALĂ DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ, 16.02.2014

CLASA a IX a

1. Fie şirul $(a_n)_{n\geq 1}, a_{n+1}=a_n^2-a_n+\frac{3}{4}$, oricare ar fi $n\geq 1, a_1=\frac{2013}{2014}$.

a) Determinaţi formula termenului general $a_n, n\geq 1$.

b) Demonstraţi că $\left(a_1-\frac{1}{2}\right)\left(a_2-\frac{1}{2}\right)\dots\left(a_n-\frac{1}{2}\right)\leq\left(\frac{503}{1007}\right)^n$, oricare ar fi $n\geq 1$.

Carmen şi Viorel Botea, Brăila

2 În ΔABC ascuţitunghic, H este ortocentrul, iar A_1, B_1, C_1 simetricele lui H faţă de mijloacele laturilor $[BC],[AC]$, respectiv $[AB]$. Arătaţi că dacă triunghiurile $A_1B_1C_1$ şi ABC au acelaşi centru de greutate, atunci ΔABC este echilateral.

Carmen şi Viorel Botea, Brăila, S.G.M.12/2013

3. Fie $(a_n)_{n\geq 1}$ o progresie aritmetică cu raţia pozitivă, $a_1\geq\frac{1}{2}$ şi suma :

$S_n=\sqrt{1+\frac{r}{a_1\cdot a_2}}+\sqrt{1+\frac{r}{a_2\cdot a_3}}+\dots+\sqrt{1+\frac{r}{a_n\cdot a_{n+1}}}$, $n\in N$, n ≥ 2. Calculaţi partea întreagă a lui S_{2014}.

***

4. Se consideră trapezul $ABCD$ cu $AB \parallel CD$ şi punctele H_1, H_2 ortocentrele triunghiurilor ABC şi ADC.

Demonstraţi că $H_1H_2 \parallel BD$ dacă şi numai dacă $AD=BC$.

Marius Damian, profesor, Brăila

Notă:
1. Toate subiectele sunt obligatorii. Fiecare subiect valorează 7 puncte.
2. Timpul efectiv de lucru este de trei ore.

INSPECTORATUL ŞCOLAR JUDEŢEAN
BRĂILA

OLIMPIADA NAŢIONALĂ DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ, 16.02.2014

CLASA a X a

1. Comparaţi numerele:

$a=\left[\log_2\left(\sqrt{5}+1\right)\right]^3$ şi $b=1+\log_2\left(\sqrt{5}+2\right)$.

Marius Damian, profesor, Brăila

2. Rezolvaţi ecuaţia $\log_a\left(1+\sqrt{x}\right)=\log_b x$, unde $a>1$, $b>1$, $a^2=b+1$.

3. Arătaţi că dacă a, b, c $\in(0,1)$ atunci:

$$\log_{\frac{a+b}{2}} c+\log_{\frac{b+c}{2}} a+\log_{\frac{c+a}{2}} b\geq 3$$

R.M.T. - 2012

4. Fie ΔABC , $A(z_A)$, $B(z_B)$, $C(z_C)\in C(O,R)$. Dacă :

$z_A\cdot\overline{z_B}+\overline{z_A}\cdot z_B=z_B\cdot\overline{z_C}+\overline{z_B}\cdot z_C=z_A\cdot\overline{z_C}+\overline{z_A}\cdot z_C$, atunci ΔABC este echilateral.

Gheorghe Alexe, profesor, Brăila

Notă:
1. Toate subiectele sunt obligatorii. Fiecare subiect valorează 7 puncte.
2. Timpul efectiv de lucru este de trei ore.

INSPECTORATUL ŞCOLAR JUDEŢEAN
BRĂILA

OLIMPIADA NAŢIONALĂ DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ, 16.02.2014

CLASA a XI a

1. Fie $A, B \in M_n(\mathbb{C})$, astfel încât $AB = BA$ şi $A^7 = I_n, B^5 = I_n$. Să se calculeze $rang(A+B)$.

***

2. Fie $A \in M_3(\mathbb{R})$.

a) Să se arate că $\det (A^*)^* = (\det A)^4$, unde A^* este adjuncta lui A.

b) Dacă A este o matrice simetrică, $\det A = 0$ şi fiecare element al lui A are pătratul egal cu complementul său algebric atunci $A = O_3$.

Gheorghe Alexe, profesor, Brăila

3. Calculaţi limita şirului $(x_n)_{n\geq 2}$, dat prin

$$x_n = \sqrt[n]{n!} \cdot \left(\operatorname{arctg} \sqrt[n]{2014} - \frac{\pi}{4} \right), \quad \forall n \geq 2.$$

Marius Damian, profesor, Brăila

4. Să se arate că şirul $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ dat prin relaţia de recurenţă $x_{n+1} = x_n^2 - 4x_n + 6, (\forall) n \in \mathbb{N}^*$,

unde $x_1 \in [2,3]$, este convergent şi să i se precizeze limita .

Narcis Gabriel Turcu, profesor, Brăila

Notă:
1. Toate subiectele sunt obligatorii. Fiecare subiect valorează 7 puncte.
2. Timpul efectiv de lucru este de trei ore.

INSPECTORATUL ŞCOLAR JUDEŢEAN
BRĂILA

OLIMPIADA NAŢIONALĂ DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ, 16.02.2014

CLASA a XII a

1. Se consideră $k>0$ şi mulţimea $G=(-k,k)$ pe care se defineşte legea de compoziţie $x*y=\dfrac{k^2(x+y)}{k^2+xy}$, $\forall x,y\in G$. Admitem cunoscut că $(G,*)$ este grup comutativ cu elementul neutru 0.

a) Să se calculeze x^n, $n\in\mathbb{N}$, $n\geq 2$, unde $x^n=\underbrace{x*x*...*x}_{\text{de } n \text{ ori } x}$.

b) Să se arate că $\operatorname{ord}(x)=+\infty$, $\forall x\in G$, $x\neq 0$.

c) Să se arate că grupurile $(G,*)$ şi $(\mathbb{R}^*,\cdot)$ nu sunt izomorfe.

Gheorghe Alexe, profesor, Brăila

2. Grupul $(G,\cdot)$ are 2014 elemente, iar funcţia $f:G\to G$, $f(x)=x^9$ este endomorfism al grupului G. Demonstraţi că G este comutativ.

Marius Damian, profesor, Brăila

3. a) Să se calculeze $\displaystyle\int\left[\frac{x}{(x+1)^2}\sin x+\frac{x+2}{(x+1)^2}\cos x\right]dx$, $x\in(-1,\infty)$.

b) Să se calculeze $\displaystyle\int\left[\frac{x}{(x+1)^2}f(x)+\frac{x+2}{(x+1)^2}g(x)\right]dx$, $x\in(-1,\infty)$, unde $f,g:(-1,\infty)\to\mathbb{R}$ sunt două funcţii derivabile cu $f'(x)=g(x)$ şi $g'(x)=-f(x)$, $\forall x\in(-1,\infty)$.

Adela Dimov, profesor, Brăila

4. Fie $a\in\mathbb{R}$ şi $f:[0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases} x^a\sin^{32}\dfrac{1}{x}\cos^{23}\dfrac{1}{x}, & x>0\\ a, & x=0.\end{cases}$

a) Să se determine $a\in[0,+\infty)$ astfel încât f să admită primitive.

b) Să se determine $a\in(-\infty,0)$ astfel încât f să fie integrabilă pe $[0,2\pi]$.

Gabriel Daniilescu, profesor, Brăila

Notă:
1. Toate subiectele sunt obligatorii. Fiecare subiect valorează 7 puncte.
2. Timpul efectiv de lucru este de trei ore.