



OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

Etapa locală

17 februarie 2018

Clasa a X-a

1. Fie $z, u, w \in \mathbb{C}$ astfel încât $z + u + w = 0$.

a) Demonstrați că $3(|z|^2 + |u|^2 + |w|^2) = |z - u|^2 + |u - w|^2 + |w - z|^2$.

b) Demonstrați că $3(|z| + |u| + |w|) \leq 2(|z - u| + |u - w| + |w - z|)$.

2. Fie funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, astfel încât:

$$f(f(x)) = f(x) + x, \forall x \in \mathbb{R}.$$

Să se arate că:

a) f este injectivă și $f(0) = 0$.

b) $f^{[1]} + f^{[2]} + \dots + f^{[n]} = f^{[n+2]} - f^{[2]}$, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$, cu notația:

$$f^{[k]} = \underbrace{f \circ f \circ \dots \circ f}_{\text{de } k \text{ ori}}, k \in \mathbb{N}^*.$$

3. a) Să se rezolve ecuația:

$$\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} e^x) + \operatorname{ctg}(\operatorname{arctg} e^{-x}) = 2.$$

b) Să se rezolve ecuația:

$$x^{\lg 5} + 12^{\lg x} = 13^{\lg x}.$$

4. Fie $m > 0$ un număr fixat. Să se arate că:

$$\frac{a}{a+mb+c} + \frac{b}{b+mc+a} + \frac{c}{c+ma+b} \geq \min\left(1, \frac{3}{m+2}\right), \text{ oricare ar fi } a, b, c > 0.$$

Notă:

- Toate subiectele sunt obligatorii;
- Fiecare subiect se notează cu 7 puncte;
- Timp de lucru: 3 ore.