

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ
SUCEAVA, 19 februarie 2017
BAREM DE CORECTARE ȘI NOTARE-CLASA a X-a

1. a) (3p) Arătați că $\log_a \frac{b+c+d}{3} \geq \frac{\log_a b + \log_a c + \log_a d}{3}, \forall a, b, c, d \in (1, +\infty)$.

b) (4p) Să se arate că pentru orice numere reale $a, b, c, d > 1$, are loc inegalitatea:

$$\log_a \frac{b+c+d}{3} + \log_b \frac{a+c+d}{3} + \log_c \frac{a+b+d}{3} + \log_d \frac{a+b+c}{3} \geq 4.$$

Precizați când are loc egalitatea.

Soluție: a) Aplicăm inegalitatea dintre media aritmetică și media geometrică și obținem:

$$\log_a \frac{b+c+d}{3} \geq \log_a \sqrt[3]{bcd} = \frac{\log_a b + \log_a c + \log_a d}{3}.$$

b) Din inegalitatea de la punctul a) și analoagele, prin sumare, obținem:

$$\begin{aligned} & \log_a \frac{b+c+d}{3} + \log_b \frac{a+c+d}{3} + \log_c \frac{a+b+d}{3} + \log_d \frac{a+b+c}{3} \geq \\ & \geq \frac{(\log_a b + \log_b a) + (\log_a c + \log_c a) + (\log_a d + \log_d a) + (\log_b c + \log_c b) + (\log_b d + \log_d b) + (\log_c d + \log_d c)}{3} \end{aligned}$$

Folosind inegalitatea $\log_x y + \log_y x \geq 2, \forall x, y > 1$, rezultă concluzia.

Egalitatea are loc pentru $a = b = c = d$.

Barem:

a) $\log_a \frac{b+c+d}{3} \geq \log_a \sqrt[3]{bcd} = \frac{\log_a b + \log_a c + \log_a d}{3}$	3p
b) Demonstrează $\log_x y + \log_y x \geq 2, \forall x, y > 1$	1p
Sumează inegalitățile și finalizează	2p
Justificarea cazului de egalitate	1p

2. Fie $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$ cu $|z_1| = |z_2| = |z_3| = 1$ și $z_1 + z_2 + z_3 = -i$.

a) (5p) Arătați că $(z_1 + i)(z_2 + i)(z_3 + i) = 0$.

b) (2p) Calculați suma $S = z_1^{2017} + z_2^{2017} + z_3^{2017}$.

Soluție. a) $|z_1| = |z_2| = |z_3| = 1 \Rightarrow |z_1|^2 = |z_2|^2 = |z_3|^2 = 1 \Leftrightarrow z_i \cdot \overline{z_i} = 1 \Leftrightarrow \overline{z_i} = \frac{1}{z_i}, i = 1, 2, 3$

$$z_1 + z_2 + z_3 = -i \Leftrightarrow \overline{z_1 + z_2 + z_3} = i \Leftrightarrow \overline{z_1} + \overline{z_2} + \overline{z_3} = i \Leftrightarrow \frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2} + \frac{1}{z_3} = i \Leftrightarrow$$

$$\frac{z_1 z_2 + z_1 z_3 + z_2 z_3}{z_1 z_2 z_3} = i \Leftrightarrow z_1 z_2 + z_1 z_3 + z_2 z_3 = i z_1 z_2 z_3 \quad (1)$$

Prin calcul direct se obține $(z_1 + i)(z_2 + i)(z_3 + i) = z_1 z_2 z_3 + i(z_1 z_2 + z_1 z_3 + z_2 z_3) - (z_1 + z_2 + z_3) - i \quad (2)$

Din relațiile (1) și (2) rezultă $(z_1 + i)(z_2 + i)(z_3 + i) = 0$.

b) Presupunem $z_1 = -i \Rightarrow z_3 = -z_2 \Rightarrow S = (-i)^{2017} = -i$.

Barem.

a) Deduce $\overline{z_i} = \frac{1}{z_i}, i = 1, 2, 3$	1p
Demonstrează relația (1)	2p
Determină (2)	1p
Finalizare $(z_1 + i)(z_2 + i)(z_3 + i) = 0$	1p
b) Rezolvarea cerinței	2p

3. (7p) Fie $a, b \in (0, 1) \cup (1, +\infty)$ și funcția injectivă $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, astfel încât funcția $g: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = f(\log_a x) + f(\log_b x)$ este funcție constantă. Să se demonstreze că $ab = 1$ și să se arate că există funcții $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ care satisfac cerințele enunțului.

Dan Popescu, Suceava

Soluție. Fie $g(x) = f(\log_a x) + f(\log_b x) = k$, $\forall x > 0$, unde $k \in \mathbb{R}$. Atunci

$k = f(x) + f(\log_b a^x) = f(\log_a b^x) + f(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$, de unde, deoarece f este injecție, se deduce

$\log_a b^x = \log_b a^x$, $\forall x \in \mathbb{R}$, ceea ce asigură $\log_a^2 b = 1$, adică $a = b$ sau $ab = 1$. Dacă

$a = b$, $g(x) = 2f(\log_a x)$, $\forall x > 0$, adică $f(x) = \frac{k}{2}$, $\forall x \in (0, +\infty)$ și f nu este funcție injectivă. De

exemplu, pentru $b = \frac{1}{a}$ și $f(x) = a^x - a^{-x}$, se obține $g(x) = 0$, $\forall x \in (0, +\infty)$.

Barem.

Deduce $g(a^x) = f(x) + f(\log_b a^x)$, $g(b^x) = f(\log_a b^x) + f(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$	2p
Demonstrează $\log_a^2 b = 1$	2p
Tratează cazul $a = b$ și deduce $ab = 1$	1p
Construiește un exemplu.....	2p

4. (7p) Determinați funcțiile $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ cu proprietatea că

$$f(x^2 f(x) + f(y)) = f(f(x^3)) + y, \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Supliment G.M. 5/2017

Soluție. Considerăm $x = 0 \Rightarrow f(f(y)) = f(f(0)) + y$, $\forall y \in \mathbb{R}$, deci funcția $f \circ f$ este bijectie, ceea ce implică bijectivitatea funcției f .

Dacă în relația din ipoteză $y = 0 \Rightarrow f(x^2 f(x) + f(0)) = f(f(x^3))$, $\forall x \in \mathbb{R}$ și din injectivitate deducem

$$f(x^3) = x^2 f(x) + f(0), \forall x \in \mathbb{R}. \text{ Pentru } x = 1 \Rightarrow f(1) = f(1) + f(0), \text{ deci } f(0) = 0.$$

Astfel am obținut relațiile $f(x^3) = x^2 f(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$ (1) și $f(f(x)) = x$, $\forall x \in \mathbb{R}$ (2).

Rescriem egalitatea din ipoteză sub forma $f(x^2 f(x) + f(y)) = f(f(x^3)) + f(f(y))$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$ și ținând cont de surjectivitatea funcției f și a funcției $x \mapsto x^3$ deducem că $f(u+v) = f(u) + f(v)$, $\forall u, v \in \mathbb{R}$, adică f satisface ecuația funcțională Cauchy. Se arată ușor că $f(nx) = nf(x)$, $\forall n \in \mathbb{Z}$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

Folosind (1), avem $f((x+1)^3) = (x+1)^2 f(x+1) = (x+1)^2 (f(x) + f(1))$ și

$$f((x-1)^3) = (x-1)^2 f(x-1) = (x-1)^2 (f(x) - f(1)), \text{ relații care adunate ne dau}$$

$$f((x+1)^3 + (x-1)^3) = (2x^2 + 2) f(x) + 4xf(1) \Leftrightarrow f(2x^3 + 6x) = (2x^2 + 2) f(x) + 4xf(1) \Leftrightarrow$$

$$2f(x^3) + 6f(x) = (2x^2 + 2) f(x) + 4xf(1) \Rightarrow (2x^2 + 6) f(x) = (2x^2 + 2) f(x) + 4xf(1) \Rightarrow f(x) = xf(1).$$

Înlocuim în relația (2) și obținem $f^2(1) = 1 \Leftrightarrow f(1) = \pm 1$.

În concluzie, funcțiile cerute sunt $f(x) = x$ și $f(x) = -x$.

Barem.

$x = 0 \Rightarrow f(f(y)) = f(f(0)) + y$, $\forall y \in \mathbb{R}$	1p
Deduce bijectivitatea funcției.....	1p
Deduce relațiile $f(x^3) = x^2 f(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$ și $f(f(x)) = x$, $\forall x \in \mathbb{R}$	2p
Demonstrează $f(u+v) = f(u) + f(v)$, $\forall u, v \in \mathbb{R}$	1p
Demonstrează că funcțiile cerute sunt $f(x) = x$ și $f(x) = -x$	2p

Notă: Orice altă soluție corectă se va puncta corespunzător.