

Barem de corectare OLM 2017 Clasa a X-a

1. Dacă $\log_a b = x > 0$ avem $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2+x}} + \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{2+x}} \leq \sqrt{\frac{x}{2} + \frac{2}{x}}$ (1) (2p)

$\frac{x}{2} + \frac{2}{x} \geq 2 \Rightarrow \sqrt{\frac{x}{2} + \frac{2}{x}} \geq \sqrt{2}$ (2p)

Este suficient să arătăm că $\frac{\sqrt{2+x}}{\sqrt{2+x}} \leq \sqrt{2}$ (1p)

$\sqrt{2} + \sqrt{x} \leq \sqrt{2}\sqrt{2+x} \Leftrightarrow (\sqrt{2} - \sqrt{x})^2 \geq 0$ (2p)

(Se punctează corespunzător demonstrarea inegalității (1) prin ridicare la pătrat)

2. Ecuația este echivalentă cu $x(e^{x^2-e} - 1) + (x^2 - e)(e^x - 1) = 0$ (1) (2p)

$0, \sqrt{e}, -\sqrt{e}$ sunt soluții ale ecuației (1) (2p)

Pentru $x \in \mathbb{R}^*$ avem $\frac{e^x - 1}{x} > 0$ (1p)

Pentru $x \in \mathbb{R} \setminus \{-\sqrt{e}, 0, \sqrt{e}\}$ avem $\frac{e^{x^2-e} - 1}{x^2 - e} > 0; \frac{e^x - 1}{x} > 0$, deci ecuația $\frac{e^{x^2-e} - 1}{x^2 - e} + \frac{e^x - 1}{x} = 0$ echivalentă cu (1) nu are alte soluții (2p)

3. $z = x + iy, x, y \in \mathbb{R}, |z| = 1 \Rightarrow z \cdot \bar{z} = 1, x^2 + y^2 = 1$ (1p)

$|1 + z + z^3| = \sqrt{3} \Leftrightarrow (1 + z + z^3)(1 + \bar{z} + \bar{z}^3) = 3$ (1p)

$z + \bar{z} = 2x, z^2 + \bar{z}^2 = 4x^2 - 2, z^3 + \bar{z}^3 = 8x^3 - 6x$ (2p)

Obținem $8x^3 + 4x^2 - 4x - 2 = 0$ cu soluțiile $x = -\frac{1}{2}, x = \frac{\sqrt{2}}{2}, x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ (1p)

$z_1 = -\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}, z_2 = -\frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2}, z_3 = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{i\sqrt{2}}{2}, z_4 = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{i\sqrt{2}}{2}, z_5 = -\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{i\sqrt{2}}{2}, z_6 = -\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{i\sqrt{2}}{2}$ (2p)

4. a) $\forall y \in \mathbb{R}, (\exists!) x = \log_2(2^y - 1) \in (0, \infty), f(x) = y$, deci f este bijectivă (1p)

$f^{-1}: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, f^{-1}(x) = \log_2(2^x - 1)$ (1p)

b) $\left(2^{\frac{x+y}{2}} + 1\right)^2 \leq (2^x + 1)(2^y + 1) \Leftrightarrow \left(2^{\frac{x}{2}} - 2^{\frac{y}{2}}\right)^2 \geq 0$ (2p)

c) Se demonstrează prin inducție matematică $f_n(x) = \log_2(2^x + n), \forall n \in \mathbb{N}^*$ (2p)

$f_{2017}(x) = \log_2(2^x + 2017)$ (1p)