

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
– ETAPA LOCALĂ 08. 02. 2020 –

CLASA A V -A
SOLUȚII ȘI BAREME ORIENTATIVE

Notă: Fiecare subiect se punctează de la 0 la 7 puncte.

Orice altă rezolvare corectă se asimilează conform baremului

1. Se consideră numerele $a = [5^2 + 9^3 - (2^{15})^4 : 2^{56} - (14 + 4 \cdot 2^0)^2 : 3] : (2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7)$ și $b = (16 \cdot 19 - 18 \cdot 16)^4 : 8^5$. Determinați restul împărțirii sumei $a^{2018} + b^{2020}$ la 5.

Soluție:

Calculând:

- $a = (25 + 729 - 2^{60} : 2^{56} - 18^2 : 3) : 210 = (754 - 16 - 324 : 3) : 210 = 630 : 210 = 3$;
- $b = [16 \cdot (19 - 18)]^4 : (2^3)^5 = (2^4)^4 : (2^3)^5 = 2^{16} : 2^{15} = 2$;
- $u(a^{2018}) = u(3^{4 \cdot 504 + 2}) = u(3^2) = 9$ și $u(b^{2020}) = u(2^{2020}) = u(2^{4 \cdot 505}) = 6$;

avem $u(a^{2018} + b^{2020}) = u(3^{2018} + 2^{2020}) = u(9 + 6) = u(15) = 5$ de unde restul împărțirii sumei $a^{2018} + b^{2020}$ la 5 este 0.

Detalii de rezolvare	Barem asociat
Deduce $a = 3$	2p
Deduce $b = 2$	2p
Argumentează $u(a^{2018}) = 9$ și $u(b^{2020}) = 6$	2p
Arată că $u(a^{2018} + b^{2020}) = 5$ de unde restul împărțirii sumei $a^{2018} + b^{2020}$ la 5 este 0	1p

2. Se consideră numărul $a = \underbrace{111\dots11}_{2019 \text{ de } 1}_{(2)}$.

a) Arătați că $a + 1 = 2^{2019}$.

b) Demonstrați că $a + 1$ se poate scrie ca sumă de patru numere impare consecutive.

Soluție:

a) Avem $a = \underbrace{111\dots11}_{2019 \text{ de } 1}_{(2)} = 1 \cdot 2^{2018} + 1 \cdot 2^{2017} + 1 \cdot 2^{2016} + \dots + 1 \cdot 2 + 1 \cdot 2^0$.

Înmulțind egalitatea cu 2 obținem $2 \cdot a = 2^{2019} + 2^{2018} + 2^{2017} + \dots + 2$ și calculând $2 \cdot a - a = 2^{2019} - 1$ obținem $a = 2^{2019} - 1$, de unde deducem că $a + 1 = 2^{2019}$.

b) Considerăm numerele $2k - 3$, $2k - 1$, $2k + 1$ și $2k + 3$, $k \geq 2$, cele patru numere impare consecutive a căror sumă este $a + 1$.

Avem $a + 1 = 2^{2019} = (2k - 3) + (2k - 1) + (2k + 1) + (2k + 3) = 8k = 2^2 \cdot 2k$ de unde prin împărțire la 2^2 obținem $2^{2017} = 2k$.

Deducem că

$$a + 1 = 2^{2019} = (2^{2017} - 3) + (2^{2017} - 1) + (2^{2017} + 1) + (2^{2017} + 3).$$

Ceea ce arată că $a + 1$ se poate scrie ca sumă de patru numere impare consecutive.

Detalii de rezolvare	Barem asociat
a) $a = \underbrace{111\dots11}_{2019 \text{ de } 1}_{(2)} = 1 \cdot 2^{2018} + 1 \cdot 2^{2017} + 1 \cdot 2^{2016} + \dots + 1 \cdot 2 + 1 \cdot 2^0 \dots\dots\dots$	1p
Înmulțește egalitatea cu 2 și obținem $2 \cdot a = 2^{2019} + 2^{2018} + 2^{2017} + \dots + 2 \dots\dots\dots$	1p
Calculează $2 \cdot a - a = 2^{2019} - 1$ de unde $a + 1 = 2^{2019} \dots\dots\dots$	1p
b) Notează $2k - 3$, $2k - 1$, $2k + 1$ și $2k + 3$, $k \geq 2$, cele patru numere impare consecutive a căror sumă este $a + 1 \dots\dots\dots$	1p
Argumentează că $a + 1 = 2^{2019} = (2k - 3) + (2k - 1) + (2k + 1) + (2k + 3) = 8k = 2^2 \cdot 2k$ de unde prin împărțire la 2^2 obține $2^{2017} = 2k$.	2p
Deduce că $a + 1 = 2^{2019} = (2^{2017} - 3) + (2^{2017} - 1) + (2^{2017} + 1) + (2^{2017} + 3)$ Ceea ce arată că $a + 1$ se poate scrie ca sumă de patru numere impare consecutive.	1p

3. Suma resturilor obținute prin împărțirea numerelor naturale $1, 2, 3, \dots, n-1, n$ la 21 este egală cu 20166. Determinați valoarea lui n .

Soluție:

Numerele de la 1 la 21 dau resturile $1, 2, 3, \dots, 20, 0$ prin împărțire la 21. Aceleași resturi se obțin pentru numerele de la 22 la 42 și așa mai departe, pentru orice grupă de 21 de numere consecutive. Avem $1 + 2 + 3 + \dots + 20 + 0 = 20 \cdot 21 : 2 = 210$, suma resturilor dintr-o grupă. Deoarece $20166 : 210 = 96 \text{ rest } 6$, înseamnă că avem 96 de grupe și încă trei numere care prin împărțire la 21 au suma resturilor $1 + 2 + 3 = 6$. Cele 96 de grupe sunt de la 1 până la $21 \cdot 1$, de la $21 \cdot 1 + 1$ până la $21 \cdot 2$, de la $21 \cdot 2 + 1$ până la $21 \cdot 3$ și așa mai departe, ultima grupă fiind de la $21 \cdot 95 + 1$ până la $21 \cdot 96$. Așadar, ultimul număr din ultima grupă este 2016, la care se mai adaugă numerele 2017, 2018 și 2019. Prin urmare, $n = 2019$.

Detalii de rezolvare	Barem asociat
Argumentează resturile $1, 2, 3, \dots, 20, 0$ prin împărțire la 21 pentru numerele de la 1 la 21, pentru numerele de la 22 la 42 și așa mai departe, pentru orice grupă de 21 de numere consecutive	2p
Suma resturilor dintr-o grupă de 210	1p
Precizează că avem 96 grupe și încă trei numere care prin împărțire la 21 au suma resturilor $1 + 2 + 3 = 6$	2p
Argumentează că 2016 este ultimul număr din ultima grupă, la care se mai adaugă numerele 2017, 2018 și 2019	1p
Precizează că $n = 2019$	1p

4. Determinați numerele naturale n care verifică simultan relațiile $21 \mid (n + 4)$ și $131 \leq n \leq 215$.

Soluție:

Cum $21 \mid (n + 4)$, există un număr natural k astfel încât $n + 4 = 21k$, k număr natural.

Din inegalitatea $131 \leq n \leq 215$ obținem prin adunare cu 4 la fiecare membru a inegalității că $135 \leq n + 4 \leq 219$, deci $135 \leq 21k \leq 219$.

Întrucât $135 : 21 = 6 \text{ rest } 9$ și $219 : 21 = 10 \text{ rest } 9$ avem $7 \leq k \leq 10$, deci k poate lua valorile 7, 8, 9, 10 de unde avem:

C_1 : pentru $k = 7$ avem $n + 4 = 21 \cdot 7 = 147$, obținem $n = 143$;

C_2 : pentru $k = 8$ avem $n + 4 = 21 \cdot 8 = 168$, obținem $n = 164$;

C_3 : pentru $k = 9$ avem $n + 4 = 21 \cdot 9 = 189$, obținem $n = 185$;

C_4 : pentru $k = 10$ avem $n + 4 = 21 \cdot 10 = 210$, obținem $n = 206$.

Soluțiile problemei sunt: 143, 164, 185 și 206.

Detalii de rezolvare	Barem asociat
Notează $n + 4 = 21k$, k număr natural	1p
Din inegalitatea $131 \leq n \leq 215$ deduce $7 \leq k \leq 10$ de unde k poate lua valorile 7, 8, 9, 10	2p
Discută cazurile: C_1 : pentru $k = 7$ avem $n + 4 = 21 \cdot 7 = 147$, obținem $n = 143$; C_2 : pentru $k = 8$ avem $n + 4 = 21 \cdot 8 = 168$, obținem $n = 164$; C_3 : pentru $k = 9$ avem $n + 4 = 21 \cdot 9 = 189$, obținem $n = 185$; C_4 : pentru $k = 10$ avem $n + 4 = 21 \cdot 10 = 210$, obținem $n = 206$ Finalizare: soluțiile problemei sunt 143, 164, 185 și 206	4p

**OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
– ETAPA LOCALĂ 8.02.2020 –**

**CLASA A VI -A
SOLUȚII ȘI BAREME ORIENTATIVE**

Notă: Fiecare subiect se punctează de la 0 la 7 puncte.

Orice altă rezolvare corectă se asimilează conform baremului

1. a) Determinați numerele naturale de forma $\overline{abcd}$, știind că $\overline{ab} \cdot \overline{cd} = 611$.

b) Fie numerele naturale nenule a , b și c și proporțiile: $\frac{a}{b} = \frac{2}{3}$, $\frac{3}{5} = \frac{b}{c}$.

Dacă $\frac{a}{2} + \frac{b}{3} + \frac{c}{5} = 372$, determinați numerele a , b și c .

Soluție:

a) Cum $611 = 13 \cdot 47$ de unde avem $\overline{ab} = 13$ și $\overline{cd} = 47$ respectiv $\overline{ab} = 47$ și $\overline{cd} = 13$.
Numerele sunt 1347 și 4713.

b) Folosind proporții derivate avem $\frac{a}{2} = \frac{b}{3}$ și $\frac{c}{5} = \frac{b}{3}$. Cum $\frac{a}{2} + \frac{b}{3} + \frac{c}{5} = 372$ obținem
 $\frac{b}{3} + \frac{b}{3} + \frac{b}{3} = 372 \Leftrightarrow 3 \cdot \frac{b}{3} = 372 \Leftrightarrow b = 372$. Deducem $a = \frac{372 \cdot 2}{3} = 248$ și $c = \frac{372 \cdot 5}{3} = 620$.

Detalii de rezolvare	Barem asociat
a) Descompune $611 = 13 \cdot 47$	1p
Argumentează faptul că numerele sunt 1347 și 4713	2p
b) Folosind proporții derivate obține $\frac{a}{2} = \frac{b}{3}$ și $\frac{c}{5} = \frac{b}{3}$	1p
Deduce $a = 248$, $b = 372$ și $c = 620$	3p

2. Se consideră mulțimea $M = \{\overline{ab} | a > b \text{ și } (a - b)^2 \text{ divide } a + b\}$. Determinați elementele mulțimii M .

Soluție:

Avem $a + b \leq 9 + 9 = 18$. Dacă $(a - b)^2 | a + b$, atunci $(a - b)^2 \leq a + b \leq 18$, deci $a - b \leq 4$, $a \neq 0$. Discutăm cazurile:

C₁: $a - b = 1$, atunci $1^2 | a + b$ oricare ar fi cifrele a și b . Avem $a = b + 1$ de unde avem

a	1	2	3	4	5	6	7	8	9
b	0	1	2	3	4	5	6	7	8

Așadar $\overline{ab} \in \{10, 21, 32, 43, 54, 65, 76, 87, 98\}$.

C₂: $a - b = 2$, atunci din $2^2 | a + b$ deducem $a + b \in \{4, 8, 12, 16\}$. Obținem

$$\begin{aligned} \begin{cases} a - b = 2 \\ a + b = 4 \end{cases} &\Leftrightarrow a = 3 \text{ și } b = 1, & \begin{cases} a - b = 2 \\ a + b = 8 \end{cases} &\Leftrightarrow a = 5 \text{ și } b = 3, \\ \begin{cases} a - b = 2 \\ a + b = 12 \end{cases} &\Leftrightarrow a = 7 \text{ și } b = 5, & \begin{cases} a - b = 2 \\ a + b = 16 \end{cases} &\Leftrightarrow a = 9 \text{ și } b = 7. \end{aligned}$$

Așadar $\overline{ab} \in \{31, 53, 75, 97\}$.

C₃: $a - b = 3$, atunci din $3^2 | a + b$ deducem $a + b \in \{9, 18\}$. Obținem

$$\begin{cases} a - b = 3 \\ a + b = 9 \end{cases} \Leftrightarrow a = 6 \text{ și } b = 3, \quad \begin{cases} a - b = 3 \\ a + b = 18 \end{cases} \text{ nu avem soluții.}$$

Așadar $\overline{ab} \in \{63\}$.

C₄: $a - b = 4$, atunci din $4^2 | a + b$ deducem $a + b = 16$ și nu avem soluții.

În concluzie $M = \{10, 21, 32, 43, 54, 65, 76, 87, 98, 31, 53, 75, 97, 63\}$.

Detalii de rezolvare	Barem asociat
Deduce că $a - b \leq 4$, $a \neq 0$	2p
Discută fiecare caz	
C ₁ : $a - b = 1$, obține $\overline{ab} \in \{10, 21, 32, 43, 54, 65, 76, 87, 98\}$	1p
C ₂ : $a - b = 2$, obține $\overline{ab} \in \{31, 53, 75, 97\}$	1p
C ₃ : $a - b = 3$, obține $\overline{ab} \in \{63\}$	1p
C ₄ : $a - b = 4$, nu avem soluții	1p
Finalizare: $M = \{10, 21, 32, 43, 54, 65, 76, 87, 98, 31, 53, 75, 97, 63\}$	1p

3. În jurul punctului O se consideră cinci unghiuri: $\angle AOB$, $\angle BOC$, $\angle COD$, $\angle DOE$, $\angle EOA$, astfel încât măsurile unghiurilor AOB , BOC , COD sunt direct proporționale cu numerele 3, 12, respectiv 7, iar măsurile unghiurilor COD , DOE , EOA sunt invers proporționale cu numerele 4, 2, respectiv 7.

- Aflați măsurile celor cinci unghiuri.
- Aflați măsura $\angle MON$, unde $[OM$ și $[ON$ sunt bisectoarele unghiurilor AOB , respectiv EOA .

Soluție:

- Notăm $m(\angle AOB) = a$, $m(\angle BOC) = b$, $m(\angle COD) = c$, $m(\angle DOE) = d$, $m(\angle EOA) = e$.

Cum măsurile unghiurilor AOB , BOC , COD sunt direct proporționale cu numerele 3, 12, respectiv 7 avem

$$\frac{a}{3} = \frac{b}{12} = \frac{c}{7} = k \Leftrightarrow \begin{cases} a = 3k \\ b = 12k \\ c = 7k \end{cases}, k \text{ număr natural.}$$

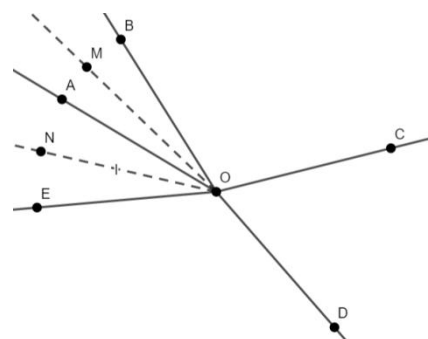
Cum măsurile unghiurilor COD , DOE , EOA sunt invers proporționale cu numerele 4, 2, respectiv 7 avem

$$4c = 2d = 7e \Leftrightarrow 28k = 2d = 7e, \text{ de unde } d = 14k, e = 4k.$$

Cum suma măsurilor unghiurilor în jurul unui punct este de 360° obținem că

$$a + b + c + d + e = 360^\circ \Leftrightarrow 3k + 12k + 7k + 14k + 4k = 360^\circ \Leftrightarrow 40k = 360^\circ \Leftrightarrow k = 9^\circ \text{ de unde } m(\angle AOB) = a = 3 \cdot 9^\circ = 27^\circ, m(\angle BOC) = b = 12 \cdot 9^\circ = 108^\circ, m(\angle COD) = c = 7 \cdot 9^\circ = 63^\circ, m(\angle DOE) = d = 14 \cdot 9^\circ = 126^\circ, m(\angle EOA) = e = 4 \cdot 9^\circ = 36^\circ.$$

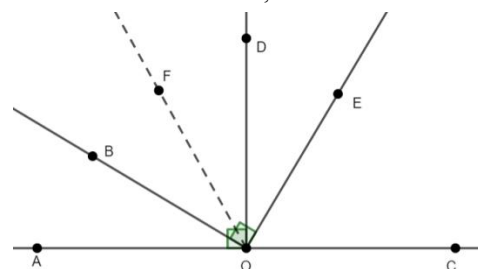
- Din $[OM$ – bisectoarea $\angle AOB$ avem $m(\angle AOM) = m(\angle MOB) = 27^\circ : 2 = 13^\circ 30'$, respective $[ON$ – bisectoarea $\angle EOA$ avem $m(\angle EON) = m(\angle NOA) = 36^\circ : 2 = 18^\circ$. Deducem că $m(\angle MON) = m(\angle MOA) + m(\angle AON) = 13^\circ 30' + 18^\circ = 31^\circ 30'$.



Detalii de rezolvare	Barem asociat
a) Notează $m(\sphericalangle AOB) = a$, $m(\sphericalangle BOC) = b$, $m(\sphericalangle COD) = c$, $m(\sphericalangle DOE) = d$, și $m(\sphericalangle EOA) = e$, iar din relația de direct proporționalitate deduce $a = 3k$, $b = 12k$, $c = 7k$	1p
Din relația de invers proporționalitate deduce $d = 14k$ și $e = 4k$	1p
Folosind suma măsurilor unghiurilor în jurul unui punct deduce $k = 9^0$	1p
Argumentează că $m(\sphericalangle AOB) = 27^0$, $m(\sphericalangle BOC) = 108^0$, $m(\sphericalangle COD) = 63^0$, $m(\sphericalangle DOE) = 126^0$, $m(\sphericalangle EOA) = 36^0$	1p
b) Figura corespunzătoare problemei	1p
Din $[OM$ –bisectoarea $\sphericalangle AOB$ deduce $m(\sphericalangle AOM) = m(\sphericalangle MOB) = 13^0 30'$, respective din $[ON$ –bisectoarea $\sphericalangle EOA$ deduce $m(\sphericalangle EON) = m(\sphericalangle NOA) = 18^0$...	1p
Determină $m(\sphericalangle MON) = m(\sphericalangle MOA) + m(\sphericalangle AON) = 31^0 30'$	1p

4. Se consideră unghiul ascuțit $\angle AOB$ și semidreapta OC , semidreapta opusă semidreptei OA . Construim $OD \perp OA$ și $OE \perp OB$ astfel încât punctele D și E sunt de aceeași parte cu B față de dreapta AC . Semidreapta OF este bisectoarea $\angle AOE$.

- Demonstrați că $\angle AOB$ și $\angle COE$ sunt complementare.
- Demonstrați că OF este bisectoarea $\angle BOD$.
- Dacă se știe și că măsura $\angle AOB$ este o treime din măsura $\angle COE$, calculați măsura $\angle AOF$



Soluție:

a) Notăm $m(\angle AOB) = \alpha$ avem $m(\angle BOC) = 180^\circ - \alpha$.

Din $OE \perp OB$ avem $m(\angle BOE) = 90^\circ$.

$$m(\angle COE) = 180^\circ - m(\angle BOE) - m(\angle AOB) = 180^\circ - 90^\circ - \alpha = 90^\circ - \alpha$$

de unde avem că $\angle AOB$ și $\angle COE$ sunt complementare.

b) $m(\angle AOE) = m(\angle AOB) + m(\angle BOE) = 90^\circ + \alpha$.

Cum OF – bisectoarea $\angle AOE$ avem $m(\angle AOF) = m(\angle FOE) = 45^\circ + \frac{\alpha}{2}$.

$$m(\angle BOF) = m(\angle AOF) - m(\angle AOB) = 45^\circ - \frac{\alpha}{2}, \quad (1)$$

$$m(\angle FOD) = m(\angle AOD) - m(\angle AOF) = 45^\circ - \frac{\alpha}{2}, \quad (2).$$

Din (1) și (2) avem $m(\angle BOF) = m(\angle FOD)$, de unde OF este bisectoarea $\angle BOD$.

c) Din faptul că măsura $\angle AOB$ este o treime din măsura $\angle COE$ avem $3 \cdot m(\angle AOB) = m(\angle COE)$ de unde avem că $m(\angle COE) = 3 \cdot \alpha$. Cum $m(\angle AOB) + m(\angle COE) = 90^\circ \Leftrightarrow 4 \cdot \alpha = 90^\circ$ de unde $\alpha = 22^\circ 30'$. Deducem că $m(\angle AOF) = 45^\circ + 11^\circ 15' = 56^\circ 15'$.

Detalii de rezolvare	Barem asociat
Figura corespunzătoare problemei	1p
a) Argumentează că $\angle AOB$ și $\angle COE$ sunt complementare	2p
b) Argumentează că OF este bisectoarea $\angle BOD$	2p
c) Deduce că $m(\angle AOF) = 56^\circ 15'$	2p

**OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
– ETAPA LOCALĂ 8.02.2020 –**

**CLASA A VII -A
SOLUȚII ȘI BAREME ORIENTATIVE**

Notă: Fiecare subiect se punctează de la 0 la 7 puncte.

Orice altă rezolvare corectă se asimilează conform baremului

1. Fie $x = 1 + \sqrt{5} + \sqrt{5^2} + \sqrt{5^3} + \dots + \sqrt{5^{2019}}$.

a) Arătați că $x + 5^{1010} = x\sqrt{5} + 1$.

b) Arătați că $\frac{4x}{\sqrt{5}+1} + 1$ este pătratul unui număr natural.

Soluție :

a) $x = 1 + \sqrt{5} + \sqrt{5^2} + \sqrt{5^3} + \dots + \sqrt{5^{2019}} \quad | \cdot \sqrt{5}$

$$x\sqrt{5} = \sqrt{5}(1 + \sqrt{5} + \sqrt{5^2} + \sqrt{5^3} + \dots + \sqrt{5^{2019}})$$

$$= \sqrt{5} + \sqrt{5^2} + \sqrt{5^3} + \dots + \sqrt{5^{2019}} + \sqrt{5^{2020}}$$

$$x\sqrt{5} - x = \sqrt{5} + \sqrt{5^2} + \sqrt{5^3} + \dots + \sqrt{5^{2019}} + \sqrt{5^{2020}} - 1 - \sqrt{5} - \sqrt{5^2} - \sqrt{5^3} - \dots - \sqrt{5^{2019}}$$

$$x\sqrt{5} - x = \sqrt{5^{2020}} - 1$$

$$x\sqrt{5} + 1 = x + \sqrt{5^{2020}}$$

$$x\sqrt{5} + 1 = x + 5^{1010}$$

b) $\frac{4x}{\sqrt{5}+1} + 1 = \frac{4x(\sqrt{5}-1)}{4} + 1 = x(\sqrt{5}-1) + 1 = x\sqrt{5} - x + 1 = x\sqrt{5} + 1 - x = x + 5^{1010} - x$
 $= 5^{1010} = (5^{505})^2$.

Barem :

a) Arată egalitatea3p

b) $\frac{4x}{\sqrt{5}+1} + 1 = \frac{4x(\sqrt{5}-1)}{4} + 1 = x(\sqrt{5}-1) + 1$ 2p

Ajunge la 5^{1010} 1p

Finalizează1p

2. Se consideră trapezul ABCD, cu $AB < CD$ și $AC \perp BD$. Dacă N este un punct oarecare pe segmentul OC, unde $AC \cap BD = \{O\}$ și P este intersecția perpendicularei din C pe DN cu dreapta BD, arătați că $BN \perp AP$.

Soluție :

În triunghiul PCD : CO, DN înălțimi , $CO \cap DN = \{N\} \Rightarrow N$ este ortocentrul ΔCDP .

$\Rightarrow PN \perp CD$, dar $CD \parallel AB \Rightarrow PN \perp AB$.

În triunghiul ABN : $NP \perp AB$, $BO \perp AN$, NP și BO înălțimi $\Rightarrow P$ este ortocentrul ΔABN .

$\Rightarrow AP \perp BN$.

Barem

Arată că N este ortocentrul ΔCDP3p

Arată că $PN \perp AB$1p

Arată că P este ortocentrul ΔABN2p

Finalizează1p

3. a) Determinați numerele naturale de forma $\overline{ab}$, scrise în baza 10 cu cifre distincte, astfel încât $a+b=10$ și $\left\lfloor \sqrt{\overline{ab}} \right\rfloor = 6$, unde $[x]$ este partea întreagă a numărului real x .

b) Determinați numerele de forma $\overline{abc}$, scrise în baza 10 cu cifre distincte, astfel încât $a \cdot b = c$ și $n = \sqrt{\overline{abc} + \overline{bca} + \overline{cab} - (\overline{ab} + \overline{bc} + \overline{ca}) - (a + b + c)}$ este număr natural.

Soluție :

$$a) \left\lfloor \sqrt{\overline{ab}} \right\rfloor = 6 \Rightarrow 6 \leq \sqrt{\overline{ab}} < 7 \Rightarrow 36 \leq \overline{ab} < 49, a+b=10 \Rightarrow \overline{ab} = 37 \text{ și } \overline{ab} = 46$$

$$b) n = \sqrt{\overline{abc} + \overline{bca} + \overline{cab} - (\overline{ab} + \overline{bc} + \overline{ca}) - (a + b + c)} =$$

$$\sqrt{100a + 10b + c + 100b + 10c + a + 100c + 10a + b - 10a - b - 10b - c - 10c - a - a - b - c}$$

$$= \sqrt{99(a + b + c)} \in \mathbb{N} \Rightarrow a+b+c = 11k^2, k \in \mathbb{N}^*.$$

Cum a, b, c sunt cifre distincte $a+b+c \leq 24 \Rightarrow k=1$.

Obținem $a+b+ab=11 \Rightarrow a = \frac{11-b}{b+1} \in \mathbb{N} \Rightarrow 12: (b+1) \Rightarrow b \in \{1, 2, 3, 5, 11\}$, și cum a, b, c sunt cifre distincte obținem : $\overline{abc} \in \{326, 236\}$.

Barem :

a) Ajunge la $36 \leq \overline{ab} < 49$ 1p

Găsește $\overline{ab} = 37$ și $\overline{ab} = 46$ 2p

b) Ajunge la $n = \sqrt{99(a + b + c)}$ 2p

Găsește $\overline{abc} \in \{326, 236\}$ 2p

4. MNPQ este dreptunghi, S este simetricul punctului P față de N, $QS \cap MN = \{R\}$ și $PR \cap MQ = \{T\}$.

- Demonstrați că $TS = MN$.
- Dacă $PR \cap QN = \{A\}$, demonstrați că $AT = 2 \cdot PA$.

Soluție :

a) $PN = NS$ și $RN \parallel PQ \Rightarrow RN$ linie mijlocie în $\Delta PQS \Rightarrow RQ = RS$.

$$\Rightarrow RN = \frac{PQ}{2} = \frac{MN}{2} \Rightarrow R \text{ este mijloc pentru } MN \Rightarrow MR = RN \quad (1)$$

$\sphericalangle MRT \equiv \sphericalangle PRN$ (unghiuri opuse la vârf) și $MR = RN \quad (1) \Rightarrow \Delta MRT \equiv \Delta NRP \Rightarrow TR = RP$, dar $QR = RS \Rightarrow PQTS$ paralelogram $\Rightarrow TS = PQ$, $MN = PQ \Rightarrow TS = MN$.

b) În triunghiul PQS : $PN = NS \Rightarrow QN$ mediană

PSTQ paralelogram și $PT \cap SQ = (R) \Rightarrow SR = RS \Rightarrow PR$ mediană, dar $QN \cap PR = \{A\} \Rightarrow A$ este centrul de greutate $\Rightarrow AP = 2 \cdot AR \Rightarrow AR = \frac{AP}{2}$.

$$TR = RP$$

$$AT = TR + RA = PR + RA = 2 \cdot PA.$$

Barem :

- Găsește $RQ = RS$1p
Arată $MR = RN$1p
Ajunge la $TS = MN$2p
- Arată că A este centrul de greutate.....1p
Ajunge la $AR = \frac{AP}{2}$1p
Finalizează.....1p.

**OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
– ETAPA LOCALĂ 8.02.2020 –****CLASA A VIII -A
SOLUȚII ȘI BAREME ORIENTATIVE**

Notă: Fiecare subiect se punctează de la 0 la 7 puncte.

Orice altă rezolvare corectă se asimilează conform baremului

1. Se consideră $x, y \in \mathbb{R}$ astfel încât $4x^2 + y^2 + 4x - 12y = 12$. Să se arate că $x \in [-4; 3]$ și $y \in [-1; 13]$.

Soluție :

$$4x^2 + y^2 + 4x - 12y = 12$$

$$4x^2 + 4x + 1 + y^2 - 12y + 36 = 49 \quad (1p)$$

$$(2x + 1)^2 + (y - 6)^2 = 49 \quad (2p)$$

$$|2x + 1| \leq 7 \text{ și } |y - 6| \leq 7 \quad (2p)$$

$$\text{deci } x \in [-4; 3] \text{ și } y \in [-1; 13]. \quad (2p).$$

2. Rezolvați în $\mathbb{Z}$ ecuația:

$$3^y + 1 = x^4 + 2x^3 + 4x^2 + 3x + 2.$$

Soluție :

$$3^y + 1 = x^4 + 2x^3 + 4x^2 + 3x + 2$$

$$3^y - 1 = x^4 + 2x^3 + 4x^2 + 3x$$

$$3^y - 1 = x(x + 1)(x^2 + x + 3) \quad (2p)$$

Se disting două cazuri:

- $y = 0$, de unde $x = 0$ sau $x = -1$, pentru că $x^2 + x + 3 = 0$ nu are soluții în $\mathbb{Z}$ (1p)
- $y \neq 0$, de unde $3^y - 1 \in M_3 + 2$ (*).

Dar, dacă notăm $x(x + 1) = z$, $z \in M_3$ sau $z \in M_3 + 2$ (**)

Cum $3^y - 1 = x(x + 1)(x^2 + x + 3)$, avem $3^y - 1 = z(z + 3)$

Dar, din (**) avem $z(z + 3) \in M_3$ sau $M_3 + 1$, contradicție cu (*),

deci cazul $y \neq 0$ nu are soluție. (3p)

Singurele soluții sunt așadar $(0, 0)$ și $(-1, 0)$. (1p)

3. Fie ABCDA'B'C'D' un cub de latură a. Dacă M, N, P, M', N', P', sunt mijloacele muchiilor (AD), (AB), (AA'), (B'C'), (D'C'), respectiv (CC'):

- a) Demonstrați că planele (MNP) și (M'N'P') sunt paralele;
b) Calculați distanța de la punctul A la planul (MNP).

Soluție :

a) demonstrează că $MN \parallel M'N'$ (1p)

demonstrează că $MP \parallel M'P'$ (sau $PN \parallel P'N'$) (1p)

deduce $(MNP) \parallel (M'N'P')$ (1p)

b) $AM = AN = AP = \frac{a}{2}$, $MN = NP = MP = \frac{a\sqrt{2}}{2}$, deci AMNP piramidă triunghiulară regulată, de unde $d(A, (MNP)) = \frac{a\sqrt{3}}{6}$. (4p)

4. Fie VABCD piramidă patrulateră regulată. Dacă G este centrul de greutate al triunghiului VAC, F este centrul de greutate al triunghiului ABD, iar M este mijlocul segmentului (BG), demonstrați că $FM \parallel (VCD)$.

Soluție :

Figura corectă (1p)

Fie $AC \cap BD = \{O\}$, $BG \cap VD = \{N\}$, $FG \cap VC = \{P\}$.

Dacă G centru de greutate al $\triangle VAC$, atunci G este centru de greutate și pentru $\triangle VBD$,

deci (BN) mediană, iar cum M mijlocul lui (BG) avem $MG = GN$. (*) (1p)

G centru de greutate al $\triangle VAC$, F centru de greutate al $\triangle ABD \Rightarrow FG \parallel VA$,

deci și $FP \parallel VA$. (1p)

Cum $\frac{FG}{VA} = \frac{OF}{OA} = \frac{1}{3}$ iar $\frac{FP}{VA} = \frac{CF}{CA} = \frac{2}{3}$ deducem că $FP = 2FG$, deci

$FG = GP$ (**). (2p)

Din (*) și (**) rezultă FMPN paralelogram $\Rightarrow FM \parallel PN$. (1p)

Cum $PN \subset (VCD)$, avem $FM \parallel (VCD)$. (1p)