

MINISTERUL EDUCAȚIEI NAȚIONALE
INSPECTORATUL ȘCOLAR JUDEȚEAN TIMIȘ

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ – 21.02.2014

BAREM DE CORECTARE ȘI NOTARE CLASA A 10-a MATEMATICĂ-INFORMATICĂ

Subiectul 1:

$$\begin{aligned} (z_1+z_2+z_3)^2 &= 2(z_1z_2+z_2z_3+z_3z_1) \dots\dots\dots 1p \\ |z_1+z_2+z_3| &= \sqrt{z_1^2+z_2^2+z_3^2+2z_1z_2+2z_2z_3+2z_3z_1} = \sqrt{\frac{1}{z_1}+\frac{1}{z_2}+\frac{1}{z_3}} = \sqrt{\frac{z_1z_2+z_2z_3+z_3z_1}{z_1z_2z_3}} \dots\dots\dots 3p \\ |z_1 \cdot z_2 \cdot z_3| &= 1 \dots\dots\dots 1p \\ \text{deci } |z_1+z_2+z_3| &= \frac{|z_1+z_2+z_3|^2}{2} \dots\dots\dots 1p \\ \text{de unde } |z_1+z_2+z_3| &= 2, \text{ deoarece } z_1+z_2+z_3 \neq 0 \dots\dots\dots 1p \end{aligned}$$

Subiectul 2:

- a) Se demonstrează cu definiția că funcția f este injectivă 1p
b) Se demonstrează cu definiția că funcția g este surjectivă 1p
c) Se demonstrează implicația inversă afirmând că prin compunerea de funcții bijective se obține o funcție bijectivă 1p
Pentru implicația directă se scrie $h = f \circ g \circ f = (f \circ g) \circ f = f \circ (g \circ f)$ și aplicând punctele a) și b) se deduce că funcția f este injectivă, respectiv surjectivă, deci bijectivă și inversabilă 2p
Scriind $f \circ g = h \circ f^{-1}$ bijectivă (deci injectivă) se deduce din a) că g este injectivă; scriind $g \circ f = f^{-1} \circ h$ bijectivă (deci surjectivă) se deduce din b) că g este și surjectivă 2p

Subiectul 3:

$$\begin{aligned} \text{a) } \log_2 6 &> \frac{6^{25}}{2^{56}} \Leftrightarrow 6^{256} > 2^{625} \Leftrightarrow 36^{128} > 32^{125} \dots\dots\dots 3p \\ \text{b) din ineg. mediilor avem: } \log_2 3 + \log_3 4 + \log_4 5 + \log_5 6 &> \sqrt[4]{\log_2 3 \cdot \log_3 4 \cdot \log_4 5 \cdot \log_5 6} \dots\dots\dots 2p \\ \text{dar } \log_2 3 \cdot \log_3 4 \cdot \log_4 5 \cdot \log_5 6 &= 4 \sqrt[4]{\log_2 6} \dots\dots\dots 1p \\ \text{ceea ce din punctul a) ne conduce la rezultat} &\dots\dots\dots 1p \end{aligned}$$

Subiectul 4:

$$\begin{aligned} \text{Notăm afixele punctelor } A, B, C, \dots \text{ cu } a, b, c, \dots, \text{ unde } |a|=|b|=|c|=1 \dots\dots\dots 1p \\ d = \frac{a+b}{2}, e = \frac{a+d+c}{3}, \dots\dots\dots 2p \\ AB=AC \Leftrightarrow |a-b|=|a-c| \text{ este echivalent cu } cb^2+ca^2=bc^2+ba^2 \dots\dots\dots 2p \\ CD \perp OE \Leftrightarrow \frac{d-c}{e} = -\frac{\overline{d-c}}{\bar{e}} \text{ este echivalent cu } cb^2+ca^2=bc^2+ba^2 \dots\dots\dots 2p \end{aligned}$$