



OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

Etapa locală

17 februarie 2018

Clasa a IX-a

1. a) Să se arate că orice mulțime A de numere naturale consecutive cu

proprietatea că $\sum_{a \in A} \frac{1}{\sqrt{a}} < 2$, conține cel mult un pătrat perfect.

b) Arătați că:

$$\left\{ \frac{2}{2017} \right\} + \left\{ 2 \cdot \frac{2}{2017} \right\} + \left\{ 3 \cdot \frac{2}{2017} \right\} + \dots + \left\{ 2016 \cdot \frac{2}{2017} \right\} = 1008.$$

2. Șirurile $(a_n)_{n \geq 1}$ și $(b_n)_{n \geq 1}$ sunt definite prin $a_1 = 2018$, $b_1 = 2017$,
 $a_{n+1} = 2018a_n + 2017b_n - 1$ și $b_{n+1} = 2017a_n + 2018b_n + 1$, oricare ar fi
 $n \geq 1$. Să se calculeze $b_{2017} - a_{2017}$.

3. În planul triunghiului ABC se consideră vectorii $\overrightarrow{AM} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BN} = \frac{3}{4}\overrightarrow{BC}$,
 $\overrightarrow{CP} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CA}$, $\overrightarrow{NQ} = \frac{1}{3}\overrightarrow{NP}$, $\overrightarrow{PR} = \frac{1}{4}\overrightarrow{PM}$, $\overrightarrow{MS} = \frac{1}{2}\overrightarrow{MN}$. Se notează cu G, G' centrele
de greutate ale triunghiurilor ABC și QRS .

a) Să se arate că punctele Q, G, G' sunt coliniare.

b) Să se determine valoarea raportului $\frac{GG'}{G'Q}$.

4. Fie ABC un triunghi și $A_1 \in (BC)$, $B_1 \in (AC)$, $C_1 \in (AB)$, astfel încât
 $\frac{A_1C}{BC} = \frac{B_1A}{AC} = \frac{C_1B}{AB}$. Notăm $AA_1 \cap BB_1 = \{M\}$, $CC_1 \cap BB_1 = \{N\}$,
 $AA_1 \cap CC_1 = \{P\}$. Atunci cu mulțimile de segmente $\{[AM], [BN], [CP]\}$ și
 $\{[PA_1], [MB_1], [NC_1]\}$ se pot forma două triunghiuri asemenea.

Notă:

- Toate subiectele sunt obligatorii;
- Fiecare subiect se notează cu 7 puncte;
- Timp de lucru: 3 ore.