

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

Etapa locală - 01. 02. 2020

BAREM DE CORECTARE - Clasa a X –a

PROBLEMA 1.

Fie numerele complexe $z_1, z_2, \dots, z_{2020}$, fiecare având modulul egal cu 1 și $z_1 + z_2 + \dots + z_{2020} = 0$. Să se

arate că $\sum_{k=1}^{2020} |z - z_k| \geq 2020 \quad \forall z \in \mathbb{C}$.

Soluție:

Din $z_1 + z_2 + \dots + z_{2020} = 0$ rezultă $\overline{z_1} + \overline{z_2} + \dots + \overline{z_{2020}} = 0$, deci $\frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2} + \dots + \frac{1}{z_{2020}} = 0$ (2p)

$$\sum_{k=1}^{2020} |z - z_k| = \sum_{k=1}^{2020} |z_k| \cdot \left| \frac{z}{z_k} - 1 \right| = \sum_{k=1}^{2020} \left| \frac{z}{z_k} - 1 \right| \quad (2p)$$

Folosind inegalitatea triunghiului avem $\sum_{k=1}^{2020} \left| \frac{z}{z_k} - 1 \right| \geq \left| \sum_{k=1}^{2020} z \left(\frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2} + \dots + \frac{1}{z_{2020}} \right) - 2020 \right| = 2020$ (3p)

Notă:

¹Fiecare corector acordă un număr întreg de puncte;

²Orice altă rezolvare corectă se punctează corespunzător;

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

Etapa locală - 01. 02. 2020

BAREM DE CORECTARE - Clasa a X –a

PROBLEMA 2.

Determinați $x, y \in (0, +\infty)$ astfel încât

$$\lg^2\left(\frac{x}{y}\right) = 3 \lg\left(\frac{x}{2020}\right) \cdot \lg\left(\frac{2020}{y}\right)$$

Soluție:

Notăm $\lg x - \lg 2020 = a$ și $\lg y - \lg 2020 = b$

Avem $\lg\left(\frac{x}{y}\right) = \lg x - \lg y = a - b$. (1p)

Ecuția devine $(a - b)^2 = -3ab$, adică $a^2 + ab + b^2 = 0$. (3p)

dacă $b \neq 0$ atunci avem ecuația $\left(\frac{a}{b}\right)^2 + \left(\frac{a}{b}\right) + 1 = 0$, nu are soluții reale

deci $b = 0$

Soluția unică a acestei ecuații omogene este $a = b = 0$. (2p)

Deci $x = y = 2020$. (1p)

Notă:

¹Fiecare corector acordă un număr întreg de puncte;

²Orice altă rezolvare corectă se punctează corespunzător;

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

Etapa locală - 01. 02. 2020

BAREM DE CORECTARE - Clasa a X –a

PROBLEMA 3.

Rezolvați ecuația $\sqrt[5]{4x-5} + \sqrt[5]{x-2} = \sqrt[5]{2x-1}$ în $\mathbb{R}$

Soluție:

Observăm că $x=2$ este soluție. (1p)

Deoarece $x = \frac{1}{2}$ nu este soluție, putem împărți ecuația prin $\sqrt[5]{2x-1}$.

Obținem $\sqrt[5]{\frac{4x-5}{2x-1}} + \sqrt[5]{\frac{x-2}{2x-1}} = 1$. (1p)

Deoarece $\frac{4x-5}{2x-1} = 2 - \frac{3}{2x-1}$ și $\frac{x-2}{2x-1} = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{3}{2x-1}\right)$ putem nota $-\frac{3}{2x-1} = t$ (2p)

Ecuația devine $\sqrt[5]{2+t} + \sqrt[5]{\frac{1}{2}(1+t)} = 1$ (*).

Deoarece funcția $f(t) = \sqrt[5]{2+t} + \sqrt[5]{\frac{1}{2}(1+t)}$ este strict crescătoare pe $\mathbb{R}$, ecuația (*) are soluția unică

$t = -1$.

Deci $x=2$ soluție unică. (3p)

Notă:

¹Fiecare corector acordă un număr întreg de puncte;

²Orice altă rezolvare corectă se punctează corespunzător;

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

Etapa locală - 01. 02. 2020

BAREM DE CORECTARE - Clasa a X –a

PROBLEMA 4.

Să se determine funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow (0, +\infty)$ care verifică simultan condițiile :

a) $f(x) \leq 5^x \quad \forall x \in \mathbb{R}$

b) $f(x+y) \leq f(x) \cdot f(y) \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$

Soluție :

Logaritmăm în baza 5 ambele relații și obținem :

$$\log_5(f(x)) \leq x \quad \text{și} \quad \log_5(f(x+y)) \leq \log_5(f(x)) + \log_5(f(y)) \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$$

Notând $g(x) = \log_5(f(x))$ avem $g(x) \leq x$ (1) și $g(x+y) \leq g(x) + g(y) \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$ (2)

Din (1) rezultă $g(0) \leq 0$ și din (2) pentru $x=y=0$ rezultă $g(0) \geq 0$, deci $g(0) = 0$ (2p)

Din (2) pentru $y = -x$ avem $0 = g(0) \leq g(x) + g(-x)$, adică $g(x) \geq -g(-x)$ (2p)

Din (1) $g(-x) \leq -x$, adică $-g(-x) \geq x$, deci $g(x) \geq x$(2p)

În concluzie $g(x)=x$, adică $f(x) = 5^x \quad \forall x \in \mathbb{R}$ (1p)

Notă:

¹Fiecare corector acordă un număr întreg de puncte;

²Orice altă rezolvare corectă se punctează corespunzător;