

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

Etapa locală, 22 februarie 2020

Barem de corectare clasa a XI-a

PROBLEMA 1

(4p) a) Fie șirul $(x_n)_{n \geq 1}$ cu termenul general $x_n = \frac{1}{n^3+1} + \frac{4}{n^3+2} + \dots + \frac{n^2}{n^3+n}$. Să se calculeze $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$.

(3p) b) Fie $(s_n)_{n \geq 1}$ unde $s_n = -2\sqrt{n} + \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}}$ (șirul lui A.G. Ioachimescu) și $s = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n$ (constanta lui A.G. Ioachimescu). Calculați limita $\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + s_n - s)^{\sqrt{n}}$.

Soluție:

a) $1 \leq k \leq n \Rightarrow n^3+1 \leq n^3+k \leq n^3+n \Rightarrow \frac{1}{n^3+n} \leq \frac{1}{n^3+k} \leq \frac{1}{n^3+1} \Rightarrow \frac{k^2}{n^3+n} \leq \frac{k^2}{n^3+k} \leq \frac{k^2}{n^3+1} \dots 1$ punct

Însumând obținem $\sum_{k=1}^n \frac{k^2}{n^3+n} \leq \sum_{k=1}^n \frac{k^2}{n^3+k} \leq \sum_{k=1}^n \frac{k^2}{n^3+1} \dots 1$ punct

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \frac{k^2}{n^3+n} &= \frac{1}{n^3+n} \sum_{k=1}^n k^2 = \frac{1}{n(n^2+1)} \cdot \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{(n+1)(2n+1)}{6(n^2+1)} \\ \sum_{k=1}^n \frac{k^2}{n^3+1} &= \frac{1}{n^3+1} \sum_{k=1}^n k^2 = \frac{1}{(n+1)(n^2-n+1)} \cdot \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{n(2n+1)}{6(n^2-n+1)} \end{aligned} \dots\dots 1 \text{ punct}$$

Aplicând criteriul cleștelui în inegalitatea $\frac{(n+1)(2n+1)}{6(n^2+1)} \leq \sum_{k=1}^n \frac{k^2}{n^3+k} \leq \frac{n(2n+1)}{6(n^2-n+1)}$,

obținem $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \frac{2}{6} = \frac{1}{3} \dots\dots\dots 1$ punct

(problemă propusă de Colegiul Național "Simion Bărnuțiu" Șimleu Silvaniei)

b) $\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + s_n - s)^{\sqrt{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \{ [1 + (s_n - s)]^{\frac{1}{s_n - s}} \}^{\sqrt{n}(s_n - s)} = e^{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n}(s_n - s)} \dots\dots\dots 1$ punct

Calculăm: $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n}(s_n - s) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{s_n - s}{\frac{1}{\sqrt{n}}} = \frac{1}{2}$ (criteriul Cesaro-Stolz) $\dots\dots\dots 1$ punct

Deci, $\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + s_n - s)^{\sqrt{n}} = \sqrt{e} \dots\dots\dots 1$ punct

(problemă propusă de prof. Bara Lajos – Liceul Reformat "Wesselényi" Zalău)

PROBLEMA 2

Calculați următoarele limite:

(2p) a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{n^2} \sin n!}{n+1}$

(5p) b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \left[\frac{1}{2^k} (x + 2^{k-1}) \right], x \in \mathbb{R}$, unde $[a]$ reprezintă partea întreagă a numărului real a .

Soluție:

a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{n^2} \sin n!}{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\sqrt[3]{n^2}}{n+1} \cdot \sin n! \right) = 0 \dots 1 \text{ punct}$

deoarece $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{n^2}}{n+1} = 0$ și $\sin n! \in [-1, 1]$ 1 punct

b) Folosind identitatea $\left[x + \frac{1}{2} \right] = [2x] - [x]$ obținem $\left[\frac{1}{2^k} (x + 2^{k-1}) \right] = \left[\frac{x}{2^k} + \frac{1}{2} \right] = \left[\frac{x}{2^{k-1}} \right] - \left[\frac{x}{2^k} \right] \dots 2$
puncte

Așadar, $\sum_{k=1}^n \left[\frac{1}{2^k} (x + 2^{k-1}) \right] = \sum_{k=1}^n \left(\left[\frac{x}{2^{k-1}} \right] - \left[\frac{x}{2^k} \right] \right) = [x] - \left[\frac{x}{2^n} \right] \dots 1 \text{ punct}$

 Pentru n suficient de mare avem următoarele:

dacă $x \geq 0 \Rightarrow 0 \leq \frac{x}{2^n} < 1 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{x}{2^n} \right] = 0$, deci $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \left[\frac{1}{2^k} (x + 2^{k-1}) \right] = [x] \dots 1 \text{ punct}$

dacă $x < 0 \Rightarrow -1 \leq \frac{x}{2^n} < 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{x}{2^n} \right] = -1$, deci $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \left[\frac{1}{2^k} (x + 2^{k-1}) \right] = [x] - 1 \dots 1 \text{ punct}$

(problemă propusă de prof. Opreș Adonia-Augustina – inspector școlar)

PROBLEMA 3

 (4p) a) Fie $A \in M_2(\mathbb{R})$ și ${}^t A$ - matricea transpusă. Știind că $\det(A + {}^t A) = 8$ și $\det(A + 2 \cdot {}^t A) = 27$, să se calculeze $\det(A)$.

(3p) b) Arătați că pentru orice $a, b, c \in \mathbb{R}$, avem: $\begin{vmatrix} 1-a-b & c & c \\ a & 1-b-c & a \\ b & b & 1-a-c \end{vmatrix} \geq 0$.

Soluție:

a) $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, {}^t A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \det(A + {}^t A) = 8 \Rightarrow 4ad - (b+c)^2 = 8 \Rightarrow ad = \frac{8 + (b+c)^2}{4} \dots 1 \text{ punct}$

$\det(A + 2 \cdot {}^t A) = 27 \Rightarrow 9ad - (b+2c)(c+2b) = 27 \Rightarrow (b-c)^2 = 36 \dots 1 \text{ punct}$

$$\det(A) = ad - bc = \frac{8 + (b + c)^2}{4} - bc = \frac{8 + (b - c)^2}{4} = \frac{8 + 36}{4} = 11$$

..... 2 puncte

(problemă selectată din GM nr. 11/2014 și propusă de Colegiul Național "Simion Bărnuțiu" Șimleu Silvaniei)

b)

$$\begin{vmatrix} 1-a-b & c & c \\ a & 1-b-c & a \\ b & b & 1-a-c \end{vmatrix} \xrightarrow{l_1+l_2+l_3} \begin{vmatrix} 1-a-b & c & c \\ a & 1-b-c & a \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \dots\dots\dots 1 \text{ punct}$$

$$\xrightarrow[c_3-c_1]{c_2-c_1} \begin{vmatrix} 1-a-b & c-1+a+b & c-1+a+b \\ a & 1-b-c-a & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} c-1+a+b & c-1+a+b \\ 1-b-c-a & 0 \end{vmatrix} = (1-a-b-c)^2 \geq 0 \dots 2 \text{ puncte}$$

(problemă propusă de prof. Sîrb Vasile – Colegiul Tehnic "Alesandru Papiu Ilarian" Zalău)

PROBLEMA 4

Matricele $A, B \in M_n(C)$ verifică relația $AB = 2A + 3B$. Să se arate că $\text{rang}(A) = \text{rang}(B)$ și că matricele $A - 3I_n$ și $B - 2I_n$ sunt inversabile.

Soluție:

Din $AB = 2A + 3B$ avem $A(B - 2I_n) = 3B$, rezultă că $\text{rang}(B) = \text{rang}(3B) = \text{rang}(A(B - 2I_n)) \leq \text{rang}(A)$
..... 2 puncte

Analog, din $AB = 2A + 3B$ avem $AB - 3B = 2A$, rezultă $(A - 3I_n)B = 2A$.

Avem $\text{rang}(A) = \text{rang}(2A) = \text{rang}(A - 3I_n)B \leq \text{rang}(B)$ 2 puncte

Din $\text{rang}(B) \leq \text{rang}(A)$ și $\text{rang}(A) \leq \text{rang}(B)$ rezultă că $\text{rang}(A) = \text{rang}(B)$ 1 punct

Avem $(A - 3I_n)(B - 2I_n) = AB - 2A - 3B + 6I_n = (AB - 2A) - 3B + 6I_n = 3B - 3B + 6I_n = 6I_n$ 1 punct

Trecând la determinanți avem $\det[(A - 3I_n)(B - 2I_n)] = \det(6I_n) \neq 0$. Atunci $\det(A - 3I_n) \neq 0$ și $\det(B - 2I_n) \neq 0$, aceasta înseamnă că matricele $A - 3I_n$ și $B - 2I_n$ sunt inversabile 1 punct

(problemă selectată din GM nr.11/2019 și propusă de prof. Sîrb Vasile – Colegiul Tehnic "Alesandru Papiu Ilarian" Zalău)