



Olimpiada Națională de Matematică 2015

Etapa locală – Iași, 23 ianuarie 2015

CLASA a X-a

Subiectul 1.

- a) Calculați $(\sqrt{5} - 1)^3$.
b) Determinați câte numere naturale nenule n verifică inegalitatea:

$$\frac{1}{\sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{2} + 1} + \frac{1}{\sqrt[3]{9} + \sqrt[3]{6} + \sqrt[3]{4}} + \dots + \frac{1}{\sqrt[3]{(n+1)^2} + \sqrt[3]{n(n+1)} + \sqrt[3]{n^2}} < 1 - 2\sqrt[3]{2 - \sqrt{5}}.$$

Subiectul 2.

Dacă $\alpha_k \in (0, 1)$, $k = \overline{1, n}$, $n \in \mathbb{N}^*$, demonstrați inegalitatea:

$$\log_{\alpha_1} \frac{1}{\frac{1}{\alpha_1} + \frac{1}{\alpha_2} + \dots + \frac{1}{\alpha_n}} + \log_{\alpha_2} \frac{1}{\frac{1}{\alpha_1} + \frac{1}{\alpha_2} + \dots + \frac{1}{\alpha_n}} + \dots + \log_{\alpha_n} \frac{1}{\frac{1}{\alpha_1} + \frac{1}{\alpha_2} + \dots + \frac{1}{\alpha_n}} \geq n.$$

Subiectul 3.

- a) Dacă $a, z, z' \in \mathbb{C}$, arătați că $|z + a| + |z' + a| \geq |z - z'|$.
b) Dacă $a, z \in \mathbb{C}$, $|z| = 1$, $n \in \mathbb{N}^*$, arătați că $\sum_{k=1}^{2n} |z^k + a| \geq n|z - 1|$.

Subiectul 4.

Fie A un punct al cercului cu centrul în originea reperului cartezian xOy și de rază 1, astfel încât

$$\mu(\widehat{xOA}) = \frac{\pi}{6}.$$

- a) Determinați ecuația binomă de grad minim, având coeficienți reali, pentru care una dintre rădăcini să fie afixul punctului A ;
b) Aflați aria poligonului cu vârfurile A_k , unde A_k sunt imaginile geometrice ale ecuației de la punctul a).

Timp de lucru 3 ore.

Fiecare subiect este notat cu 7 puncte.