



OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ
FAZA LOCALĂ 17.02.2020
CLASA A IV-A

SUBIECTUL I

a) (3p) Calculați:

$$5x[326-16x(54:9)]+870 ;$$

b) (4p) Să se afle termenul necunoscut din egalitatea:

$$3+3x[3+3x(3+3x3)] = (3xa+3)x3+3.$$

SUBIECTUL II

Cinci prieteni Ioana, Diana, Daniel, Cornel și Cristina vor să cumpere o culegere de matematică. Fiecare copil participă cu o anumită sumă de bani astfel: Ioana și Diana cu 8 lei împreună, Ioana și Daniel cu 12 lei împreună, Ioana și Cornel cu 16 lei împreună, iar Ioana și Cristina cu 20 lei împreună.

Aflați cu ce sumă de bani participă Ioana, știind că ceilalți patru prieteni participă cu 44 lei în total.

SUBIECTUL III

Să se scrie toate numerele naturale impare de forma $\overline{abcd}$ cu toate cifrele distincte care au cifra zecilor 7 și suma cifrelor 11.

SUBIECTUL IV

Trei buchete de trandafiri și patru buchete de lalele costă 260 lei, iar cu jumătate din prețul unui buchet de trandafiri se poate cumpăra un singur buchet de lalele, rămânând un rest de 10 lei. Care este prețul unui buchet de trandafiri?

Notă: Toate subiectele sunt obligatorii.

Fiecare exercițiu este notat de la 0 la 7 puncte.

Timp de lucru efectiv 2 ore.

**BAREM DE CORECTARE SI NOTARE****Clasa a IV a****Olimpiada de matematică - Faza locală 17.02.2020**

- Nu se acorda puncte din oficiu.
- Pentru orice soluție corectă, diferită de cea din barem, se acorda punctajul corespunzător.
- Fiecare exercițiu este punctat de la 0 la 7.

Subiectul I. a) Raspuns 2020.....3 puncte

b) $a=12$ 4 puncte

Subiectul II. Fie x, y, z, t, u sumele de bani ale celor cinci prieteni.....1 punct

Obținem relațiile:

$$\left. \begin{array}{l} x + y = 8 \\ x + z = 12 \\ x + t = 16 \\ x + u = 20 \\ y + z + t + u = 44 \end{array} \right\} \dots\dots\dots 3 \text{ puncte}$$

Deci $4x + 44 = 56$, de unde rezulta ca $x = 3$ lei..... 3 puncte

Subiectul III. Cifra zecilor este $c = 7$1 punct

$a + b + d = 4$, a, b, d cifre distincte și a diferit de 0.....1 punct

Cum numărul este impar rezulta ca d poate fi 1 sau 3..... 2 puncte

Obținem numerele 1073 și 3071..... 3 puncte

Subiectul IV.

Dacă jumătate din prețul unui buchet de trandafiri înseamnă prețul unui buchet de lalele plus încă 10 lei, atunci un buchet de trandafiri valorează cât două buchete de lalele și încă 20 lei.

3 buchete de trandafiri.....4 buchete de lalele.....260 lei 2 puncte

3 buchete de trandafiri = 6 buchete de lalele + 3×20 lei 2 puncte

Obținem că 10 buchete de lalele costă 200 lei, deci prețul unui buchet de lalele egal cu 20 lei2 puncte

Cum un buchet de trandafiri valorează cât două buchete de lalele plus încă 20 lei, se poate obține că prețul buchetului de trandafiri este de 60 lei. 1 punct



OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ
FAZA LOCALĂ 17.02.2020
CLASA A V-A

SUBIECTUL I

- a) (3p) Demonstrați că numărul $N = \overline{ab4} + \overline{aba} + \overline{a1b}$ este multiplu de 7, oricare ar fi cifrele a și b .
- b) (4p) Demonstrați că numărul $a = 4^{n^2+n} + 9^{n^2-n} - 2$ este divizibil cu 5, oricare ar fi n un număr natural.

SUBIECTUL II

- a) (4p) Să se determine numărul $\overline{abc}$, știind că împărțit la $\overline{bc}$ dă câtul 8 și restul a .
- b) (3p) Determinați suma resturilor împărțirilor numerelor $1, 2, 3, \dots, 2020$ la 7.

SUBIECTUL III

- a) (4p) Comparați numerele:
 $a = 1+3+5+\dots+2019$ și $b = 2+4+6+\dots+2020$.
- b) (3p) Aflați ultima cifră a numărului $(a+6)^b$.

SUBIECTUL IV

- a) (3p) Arătați că $2592 = 2^5 \cdot 3^4$;
- b) (4p) Determinați numerele naturale x, y, z din egalitatea:
 $4 \cdot 8^x + 8 \cdot 4^y + 2 \cdot 16^z = 2592$.

(Gazeta matematică)

Notă: Toate subiectele sunt obligatorii.

Fiecare exercițiu este notat de la 0 la 7 puncte.

Timp de lucru efectiv 2 ore.

**BAREM DE CORECTARE SI NOTARE****Clasa a V a****Olimpiada de matematică - Faza locală 17.02.2020**

- Nu se acordă puncte din oficiu.
- Pentru orice soluție corectă, diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
- Fiecare exercițiu este punctat de la 0 la 7.

Subiectul I. a) $N=100a+10b+4+100a+10b+a+100a+10+b$1 punct

$$= 301a+21b+14$$
.....1 punct

$$=7(43a+3b+2):7$$
.....1 punct

b) $n^2+n=n(n+1):2$, deci $U(4^{n^2+n}) = 6$ (1).....1 punct

$$n^2-n=n(n-1):2$$
, deci $U(9^{n^2-n}) = 1$ (2).....1 punct

Din (1) și (2) rezultă $U(a) = 5$, deci $a:5$2 puncte

Subiectul II. a) $\overline{abc} = \overline{bc} \cdot 8 + a$, unde $0 \leq a < \overline{bc}$ 1 punct

$$\text{Deci, } 100a+10b+c=(10b+c) \cdot 8+a \Rightarrow 99a=7 \cdot (10b+c) \Rightarrow 99a=7 \cdot \overline{bc}, \text{ cum } 7 \cdot \overline{bc}:7$$

$$\Rightarrow a=7 \Rightarrow \overline{bc}=99 \Rightarrow b=c=9$$
..... 2 puncte

$$\Rightarrow \overline{abc}=799$$
..... 1 punct

b) Resturile la împărțirea cu 7 sunt 0,1,2,3,4,5,6.....1 punct

Cum $2020=7 \cdot 288+4$, suma resturilor va fi

$$S = 0 \cdot 288 + 1 \cdot 289 + 2 \cdot 289 + 3 \cdot 289 + 4 \cdot 289 + 5 \cdot 288 + 6 \cdot 288 = 6069$$
.....2 puncte

Subiectul III. a) $a=1+3+5+\dots+2019=1010^2$2 puncte

$$b=2+4+6+\dots+2020=1010 \cdot 1011$$
, deci $a < b$2 puncte

b) $U(a+6)=6$ 1 punct

$$\text{Deci, } U((a+6)^b)=6$$
.....2 puncte

Subiectul IV. a) Se verifică prin calcul..... 3 puncte

b)

$$4 \cdot 2^{3x} + 8 \cdot 2^{2y} + 2 \cdot 2^{4z} = 2^5 \cdot 3^4 \Rightarrow 2^{3x+2} + 2^{2y+3} + 2^{4z+1} = 2^5 \cdot 3^4 \Rightarrow 2^5 \cdot (2^{3x-3} + 2^{2y-2} + 2^{4z-4}) = 2^5 \cdot 3^4$$

.....2 puncte

$$\text{Deci, } 2^{3x-3} + 2^{2y-2} + 2^{4z-4} = 81 \quad (1)$$

$$\text{Cum } 2^0 + 2^4 + 2^6 = 81 \quad (2) \quad \dots\dots\dots 1 \text{ punct}$$

$$\text{Din (1) și (2)} \Rightarrow 2^{3x-3} = 2^0 \Rightarrow x=1$$

$$2^{2y-2} = 2^6 \Rightarrow y=4$$

$$2^{4z-4} = 2^4 \Rightarrow z=2 \quad \dots\dots\dots 1 \text{ punct}$$



OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ
FAZA LOCALĂ 17.02.2020
CLASA A VI-A

SUBIECTUL I

- a) (4p) Arătați că numărul $a = 3^{n+1} \cdot 2^n + 3^{n+2} \cdot 2^{n+1} - 16 \cdot 6^n$ este divizibil cu 5, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}$.
- b) (3p) Demonstrați că oricare ar fi 7 numere naturale există două a căror diferență este divizibilă cu 6.

SUBIECTUL II

- a) (4p) Determinați numerele naturale x, y, z știind că sunt invers proporționale cu 2, 3 și 9, iar $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} > \frac{14}{37}$.
- b) (3p) Dacă a , b^2 și c^4 sunt direct proporționale cu 4, 9 și 25, iar $a \cdot b \cdot c = 7500$, aflați numerele naturale a, b și c .

SUBIECTUL III

Măsurile unghiurilor formate în jurul unui punct O sunt exprimate prin puteri ale numărului 5. Aflați numărul minim de unghiuri în condițiile date.

(Gazeta Matematică)

SUBIECTUL IV

Se da un triunghi ABC isoscel cu $AB=AC$ și $[BI]$ bisectoarea unghiului ABC , unde $I \in (AC)$. Dacă diferența dintre unghiul de la bază și unghiul din vârf este de 36° și notăm $BI=a$ cm și $CI=b$ cm atunci:

- a) (4p) Arătați că punctul I aparține mediatoarei segmentului $[AB]$;
- b) (3p) Calculați perimetrul triunghiului ABC în funcție de a și b .

Notă: Toate subiectele sunt obligatorii.

Fiecare exercițiu este notat de la 0 la 7 puncte.

Timp de lucru efectiv 2 ore.



BAREM DE CORECTARE SI NOTARE

Clasa a VI a

Olimpiada de matematică - Faza locală 17.02.2020

- Nu se acordă puncte din oficiu.
- Pentru orice soluție corectă, diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
- Fiecare exercițiu este punctat de la 0 la 7.

Subiectul I. a) $a = 3^n \cdot 3 \cdot 2^n + 3^n \cdot 3^2 \cdot 2^n \cdot 2 - 16 \cdot 6^n \dots\dots\dots 2 \text{ p}$

$$= 6^n \cdot (3 + 18 - 16) = 6^n \cdot 5 : 5, \text{ oricare ar fi } n \text{ natural } \dots\dots\dots 2 \text{ p}$$

b) Dintre cele 7 numere naturale există două care dau același rest la împărțirea cu 61 p

$$\Rightarrow \begin{cases} a = 6n + r \\ b = 6m + r \end{cases}, \text{ unde } r \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\} \Rightarrow a - b = 6(n - m) : 6 \dots\dots\dots 2 \text{ p}$$

Subiectul II.

$$\text{a) } 2x = 3y = 9z = k \Rightarrow x = \frac{k}{2}, y = \frac{k}{3}, z = \frac{k}{9} \Rightarrow \frac{2}{k} + \frac{3}{k} + \frac{9}{k} > \frac{14}{37} \Rightarrow \frac{14}{k} > \frac{14}{37} \Rightarrow k < 37 \dots\dots\dots 1 \text{ p}$$

$$\text{Cum } x, y, z \in \mathbb{N} \Rightarrow \begin{cases} k : 2 \\ k : 3 \\ k : 9 \end{cases} \Rightarrow k : [2, 3, 9] \Rightarrow k : 18, k < 37 \text{ și } k \text{ nenul} \Rightarrow k \in \{18, 36\} \dots\dots\dots 1 \text{ p}$$

$$\text{Pentru } k = 18 \Rightarrow x = 9, y = 6, z = 2 \dots\dots\dots 1 \text{ p}$$

$$\text{Pentru } k = 36 \Rightarrow x = 18, y = 12, z = 4 \dots\dots\dots 1 \text{ p}$$

$$\text{b) } \frac{a}{4} = \frac{b^2}{9} = \frac{c^4}{25} = k \Rightarrow \begin{cases} a = 4k \\ b^2 = 9k \\ c^4 = 25k \end{cases}, a, b, c \text{ numere naturale} \dots\dots\dots 1 \text{ p}$$

$$\text{Deci } k = 25p^4, \text{ unde } p \text{ este număr natural, deci } a = 5p, b = 15p^2, c = 100p^4$$

$$\text{Cum } abc = 7500 \text{ rezultă } p = 1 \text{ și deci } a = 100, b = 15, c = 5 \dots\dots\dots 2 \text{ p}$$

Subiectul III. Fie x numărul unghiurilor de 5° , y numărul unghiurilor de 25° și z numărul unghiurilor de 125° , obținem $5^\circ \cdot x + 25^\circ \cdot y + 125^\circ \cdot z = 360^\circ \dots\dots\dots 2 \text{ p}$

$$\Rightarrow x + 5^\circ \cdot (y + 5^\circ \cdot z) = 72^\circ, \text{ de unde rezultă că } x = 2 \dots\dots\dots 2 \text{ p}$$

$$\Rightarrow 5^\circ \cdot (y + 5^\circ \cdot z) = 70^\circ \Rightarrow y + 5^\circ \cdot z = 14^\circ, \text{ de unde rezultă } y = 4 \dots\dots\dots 2 \text{ p}$$

$$\Rightarrow 5^\circ \cdot z = 10^\circ, \text{ de unde rezultă } z = 2 \dots\dots\dots 1 \text{ p}$$

Subiectul IV. a) Se arată că $m(\widehat{B}) = m(\widehat{C}) = 72^\circ$ și $m(\widehat{A}) = 36^\circ \dots\dots\dots 1 \text{ p}$

$$\text{Cum } [BI \text{ bisectoarea } \widehat{ABC}] \Rightarrow m(\widehat{BAI}) = m(\widehat{ABI}) = 36^\circ \dots\dots\dots 1 \text{ p}$$

$$\text{Deci } \triangle ABI \text{ este isoscel, de unde rezultă că } [IA] \equiv [IB], \text{ deci } I$$

apartine mediatoarei segmentului $[AB] \dots\dots\dots 2 \text{ p}$

$$\text{b) } AC = AB = AI + IC = BI + IC = (a + b) \text{ cm} \dots\dots\dots 1 \text{ p}$$

$$m(\widehat{IBC}) = m(\widehat{BIC}) = 36^\circ \Rightarrow \triangle BIC \text{ este isoscel} \Rightarrow IC = BC = b \text{ cm} \dots\dots\dots 1 \text{ p}$$



$$P(\Delta ABC) = AB + AC + BC = (2a + 3b) \text{ cm} \dots\dots\dots 1 \text{ p}$$

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ
FAZA LOCALĂ 17.02.2020
CLASA A VII-A

SUBIECTUL I

a) (3p) Demonstrați că pentru orice număr natural nenul n , are loc egalitatea :

$$\frac{1}{(n+1)^2} < \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}.$$

b) (4p) Determinați $[x]$, unde :

$$x = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{2020^2} \text{ și } [x] = \text{partea întreagă a lui } x.$$

SUBIECTUL II

Să se rezolve în $\mathbb{Z}$ următoarea ecuație :

$$|||x - 2^7 \cdot 2019| - 2^6 \cdot 2019| - 2^5 \cdot 2019| - 2^4 \cdot 2019| - 2^3 \cdot 2019| - 2^2 \cdot 2019| - 2 \cdot 2019| - 2019| = 2020.$$

SUBIECTUL III

Triunghiurile din plan ABC , BCD , BDE sunt dreptunghice în A , C și D , isoscele și niciunul nu este interior celuilalt. Perpendiculara din A pe BC întâlnește pe DE în M .

Știind că $CD = 5 \text{ cm}$, să se calculeze AM .

supliment GM

SUBIECTUL IV

Se consideră un cerc de centru O și diametru $AB = 8 \text{ cm}$ și punctul T , situat pe cerc, diferit de punctele A și B . Punctul C este intersecția tangentei la cerc în punctul T cu tangenta la cerc în punctul A și punctul D este intersecția tangentei la cerc în punctul T cu tangenta la cerc în punctul B . Lungimea segmentului AC este de 2 cm . Se știe că $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$.

a) (4p) Demonstrați că triunghiul ABD este dreptunghic isoscel.

b) (3p) Dreptele AT și OC se intersectează în punctul M și dreptele BT și OD se intersectează în punctul N . Demonstrați că aria patrulaterului $MONT$ este egală cu $6,4 \text{ cm}^2$.

Model Evaluare Națională

Notă: Toate subiectele sunt obligatorii.

Fiecare exercițiu este notat de la 0 la 7 puncte.

Timp de lucru efectiv 3 ore.

**BAREM DE CORECTARE SI NOTARE****Clasa a VII a****Olimpiada de matematică - Faza locală 17.02.2020**

- Nu se acordă puncte din oficiu.
- Pentru orice soluție corectă, diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
- Fiecare exercițiu este punctat de la 0 la 7.

Subiectul I. a)
$$\frac{1}{(n+1)^2} < \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n+1-n}{n(n+1)} = \frac{n+1}{n(n+1)} - \frac{n}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$$

3p

b)
$$x = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{2020^2} < 1 + \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{2019 \cdot 2020}$$

1p

$$x < 1 + \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2019} - \frac{1}{2020}$$

1p

$$1 < x < 1 + \frac{1}{1} - \frac{1}{2020}; \quad 1 < x < 2$$

1p

$$[x] = 1$$

1p

Subiectul I¹.

$$a_1 = ||||| |x - 2^7 \cdot 2019| - 2^6 \cdot 2019| - 2^5 \cdot 2019| - 2^4 \cdot 2019| - 2^3 \cdot 2019| - 2^2 \cdot 2019| - 2 \cdot 2019|$$

$$|a_1 - 2019| = 2020$$

1p

$$a_1 \in \{-1; 2020 + 2019\}; a_1 > 0. \text{ Convine } a_1 = 2020 + 2019.$$

$$a_2 = ||||| |x - 2^7 \cdot 2019| - 2^6 \cdot 2019| - 2^5 \cdot 2019| - 2^4 \cdot 2019| - 2^3 \cdot 2019| - 2^2 \cdot 2019|$$

$$|a_2 - 2 \cdot 2019| = 2020 + 2019.$$

$$a_2 \in \{-1; 2020 + 3 \cdot 2019\}; a_2 > 0. \text{ Convine } a_2 = 2020 + 3 \cdot 2019.$$

2p

$$a_7 = |x - 2^7 \cdot 2019| = 2020 + (2^7 - 1) \cdot 2019$$

3p

$$x \in \{-1; 2020 + (2^8 - 1) \cdot 2019\} = \text{mulțimea soluțiilor ecuației.}$$

1p

Subiectul I^{II}.

figura corespunzătoare problemei

1p

AS = 2,5cm

3p

AM = 10cm

3p

Subiectul I^V.

figura corespunzătoare problemei

1p



triunghiul ABD este dreptunghic isoscel

3p

TM este înălțimea corespunzătoare ipotenuzei în $\triangle TOC$; $TM = \frac{4}{\sqrt{5}}$ cm

1p

$OM = \frac{8}{\sqrt{5}}$ cm

1p

Finalizare

1p

**OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ
FAZA LOCALĂ 17.02.2020
CLASA A VIII-A**

SUBIECTUL I

Fie expresia $E(x) = \left[1 - \frac{2x-2}{x+3} + \frac{x^2-2x+1}{(x+3)^2} \right]^{-1} \cdot \left(1 - \frac{x^2-3}{x} \right) : \frac{x^2-x-3}{-x}$

- a) (5p) Aduceți la forma cea mai simplă expresia $E(x)$, pentru valorile reale ale lui x din domeniul de existență;
- b) (2p) Determinați numerele întregi a , pentru care $E(a)$ este număr natural și are valoarea maximă 10.

SUBIECTUL II

a) (5p) Arătați că numărul : $\sqrt{2,25 - 3\sqrt{2 \cdot \frac{13-2\sqrt{13}}{13} - \left(\frac{13-2\sqrt{13}}{13}\right)^2}} + 2 \cdot \frac{13-2\sqrt{13}}{13}$

se poate scrie sub forma $a + b\sqrt{13}$, cu a și b numere raționale. (G.M. S.E.10.272)

b) (2p) Pentru valorile a și b determinate la punctul a), arătați că $a^2 - 2ab + b^2 > 2\sqrt{a^2 + b^2}$.

SUBIECTUL III

Pe planul triunghiului ABC cu unghiul drept în A, $AB = a\sqrt{3}$ și $m(\angle C) = 60^\circ$, se construiește perpendiculara MB, cu $MB = a$. Să se determine :

- a) (4p) Distanța de la punctul C la dreapta MN, unde N este Mijlocul lui AB.
- b) (3p) Tangenta unghiului format de dreapta CM cu planul (ABM);

SUBIECTUL IV

Fie ABCDA'B'C'D' un cub cu muchia de 6cm.

- a) (4p) Arătați că dreapta de intersecție a planelor (AB'C') și (D'CB) este paralelă cu AD;
- b) (3p) Calculați distanța dintre dreptele D'C și AC'.

Notă: Toate subiectele sunt obligatorii.



Timp de lucru 3 ore.

Fiecare subiect se notează de la 0 la 7 puncte.

BAREM DE CORECTARE SI NOTARE

Clasa a VIII a

Olimpiada de matematică - Faza locală 17.02.2020

- Nu se acordă puncte din oficiu.
- Pentru orice soluție corectă, diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
- Fiecare exercițiu este punctat de la 0 la 7.

	Etapele rezolvării	Punctaj
Subiectul I.	a) Se pun condițiile de existență : $x+3 \neq 0, x \neq 0, x^2 - x - 3 \neq 0 \text{ și din expresia din paranteza } \left(\frac{x-1}{x+3} - 1 \right)^{-2} = \left(\frac{x+3}{-4} \right)^2$ dreaptă, adusă la forma nu se impune nicio condiție în plus. Rezultă $x \in \mathbb{R} - \left\{ \frac{1}{2} \pm \sqrt{3}; -3; 0 \right\}$ $E(x) = \frac{(x+3)^2}{16}$	1p 1p 3p
	b) $E(a) \in \mathbb{N}$ dacă și numai dacă $(a+3)^2$ se divide cu 16 și $\frac{(a+3)^2}{16} = k$ notând , impunem condiția $k \leq 10$ $\in$ Se obține a $\{-15, -11, -7, 1, 5, 9\}$	1p 1p
	a) Efectuând calculele se ajunge la $\frac{\sqrt{13}-2}{2}$, de unde $\frac{1}{2}$ $a = -1$ și $b =$	3p 2p
	b) Se verifică inegalitatea, în care membrul stâng este 2,25	2p



	iar membrul drept $\sqrt{5}$	
Subiectul III.	a) Se dem. că $CA \perp (MAB)$, construim $AP \perp MN \perp$ și, din $T3 \perp$ se deduce că $d(C, MN) = CP$ Din asemănarea triunghiurilor APN și MBN se determină $\frac{a\sqrt{21}}{7}$ și apoi se calculează CP din triunghiul CAP, cu $\frac{a\sqrt{70}}{7}$ T. Pitagora, obținându-se $CP = \frac{a\sqrt{70}}{7}$	1p 2p 1p
	b) Cum $CA \perp (ABM)$ rezultă că unghiul dintre CM și (ABM) este $\angle CMA$. Din triunghiul CMA cu $m(\angle A) = 90^\circ$, $AC = a$ și $AM = 20$ se determină $\text{tg}(\angle CMA) = \frac{1}{2}$	1p 2p
Subiectul IV.	a) Din planul $(AB'C')$ face parte dreapta DC', iar din planul $(D'CB)$ face parte dreapta $A'B$. Notând intersecția diagonalelor feței $ABB'A'$ cu E și intersecția diagonalelor feței $DCC'D'$ cu F, deducem că dreapta de intersecție a planelor $(AB'C')$ și $(D'CB)$ este EF. Se dem. că $ADFE$ este paralelogram, de unde $EF \parallel AD$	1p 1p 2p
	b) Fie M mijlocul lui $C'A$. În triunghiul dreptunghic $C'CA$, $\frac{C'A}{2}$ CM este mediana corespunzătoare ipotenuzei, $CM = \frac{C'A}{2}$ apoi, analog, $D'M = \frac{C'A}{2}$, de unde se deduce $CM = D'M$ Din MF mediana corespunzătoare bazei triunghiului isoscel $D'MC$ rezultă $MF \perp D'C$. Se arată că $D'C \perp (ADC')$ și, construind $FG \perp C'A$, cum FG este inclusă în (ADC'), rezultă $D'C \perp FG$, așadar FG este perpendiculară atât pe $D'C$, cât și pe AC'. $FG = h$ în triunghiul dreptunghic MFC', cu $\angle F$ drept, deci $FG = \frac{FM \cdot FC'}{C'M} = \sqrt{6}$ cm.	1p 1p 1p



OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ
FAZA LOCALĂ 17.02.2020
CLASA A IX-A
Matematică-informatică

SUBIECTUL I

- a) **(3 p)** Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x + 1$. Calculați $S = f(2) + f(2^2) + \dots + f(2^9)$.
- b) **(4 p)** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația :
 $(2x + 1) + (2x + 5) + (2x + 9) + \dots + (2x + 37) = 210$.

SUBIECTUL II

Folosind metoda inducției matematice demonstrați că :

$$(5^{2n+1} \cdot 2^{n+2} + 3^{n+2} \cdot 2^{2n+1}) : 19, (\forall) n \in \mathbb{N}$$

SUBIECTUL III

Fie ABCD un dreptunghi cu laturile $AB = 4$ și $AD = 3$.

- a) **(3 p)** Demonstrați ca pentru orice punct M din planul dreptunghiului are loc

$$\vec{MA} + \vec{MC} = \vec{MB} + \vec{MD}$$

egalitatea

$$2\vec{AB} + 3\vec{AD} + \vec{AC}$$

- b) **(4 p)** Calculați modulul vectorului

SUBIECTUL IV

Fie predicatele

$$p(x,y) : |x| < 1 \text{ și } |y| < 1; x, y \in \mathbb{R} \text{ și } q(x,y) : \frac{x+y}{1+xy} \in (-1;1), x, y \in \mathbb{R} \text{ și } xy \neq -1$$

- a) **(1 p)** Aflați valoarea de adevăr a propoziției $q(4,3)$
- b) **(3 p)** Demonstrați ca $p(x,y) \Rightarrow q(x,y)$



- c) (3 p) Aflați valoarea de adevăr a propoziției : dacă $x, y \in \mathbb{R}, \frac{x+y}{1+xy} \in (-1,1)$,
atunci $|x| < 1, |y| < 1$.

Notă: Toate subiectele sunt obligatorii.

Timp de lucru 3 ore.

Fiecare subiect se notează de la 0 la 7 puncte.

BAREM DE CORECTARE SI NOTARE

Clasa a IX a - Matematică-informatică

Olimpiada de matematică - Faza locală 17.02.2020

- Nu se acordă puncte din oficiu.
- Pentru orice soluție corectă, diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
- Fiecare exercițiu este punctat de la 0 la 7.

Subiectul I.

- a) $S = 2+1+2^2+1+\dots+2^9+1 = (2+2^2+\dots+2^9) + (1+1+\dots+1) =$
 $\frac{2(2^9-1)}{2-1} + 9 = 1031$ 3 p
- b) Este o progresie aritmetică cu rația 4 și cu 10 termeni2p

Subiectul II.

Etapă de verificare pentru $n=0$ $38 : 19$ sau

$$n=1 \quad 5^3 \cdot 2^3 + 3^3 \cdot 2^3 = 2^3(125+27) = 8 \cdot 152 = 8 \cdot 8 \cdot 19 : 19 \quad \dots\dots\dots 2p$$

Etapă de demonstrație5p

$$P(n) \Rightarrow P(n+1)$$

$$(5^{2n+1} \cdot 2^{n+2} + 3^{n+2} \cdot 2^{2n+1}) = 19l, \quad 5^{2n+1} \cdot 2^{n+2} = 19l - 3^{n+2} \cdot 2^{2n+1}$$

$$5^{2(n+1)+1} \cdot 2^{(n+1)+2} + 3^{(n+1)+2} \cdot 2^{2(n+1)+1} = 5^{2n+1} \cdot 2^{n+2} \cdot 5^2 \cdot 2^1 + 3^{n+2} \cdot 2^{2n+1} \cdot 3 \cdot 2^2 =$$

$$(19l - 3^{n+2} \cdot 2^{2n+1}) \cdot 50 + 3^{n+2} \cdot 2^{2n+1} \cdot 12 = 19l \cdot 50 - 38 \cdot 3^{n+2} \cdot 2^{2n+1} = 19(50 - 2 \cdot 3^{n+2} \cdot 2^{2n+1})$$

Subiectul III.

- a) Din $\vec{MA} + \vec{MC} = \vec{MB} + \vec{MD}$ obținem $\vec{MA} - \vec{MB} = \vec{MD} - \vec{MC}$, de unde $\vec{AB} = \vec{DC}$ 3p

- b) $\vec{AC} = \vec{AB} + \vec{AD}$ 1p

$$2\vec{AB} + 3\vec{AD} + \vec{AC} = 2\vec{AB} + 3\vec{AD} + \vec{AB} + \vec{AD} = 3\vec{AB} + 4\vec{AD} \quad \dots\dots\dots 2p$$

$$|3\vec{AB} + 4\vec{AD}| = \sqrt{(3 \cdot 4)^2 + (4 \cdot 3)^2} = 12\sqrt{2} \quad \dots\dots\dots 1p$$

**Subiectul IV.**

a) Calcul direct $q(4,3) = \frac{7}{13}$ 1 p

b) Din $|x| < 1, |y| < 1$; avem $-1 < x < 1; -1 < y < 1$ și $1 + xy > 0$;

$$\frac{x+y}{1+xy} \in (-1; 1); -1 < \frac{x+y}{1+xy} < 1;$$

Avem de demonstrat ca $\frac{x+y}{1+xy} > -1$ și $\frac{x+y}{1+xy} < 1$ 1 p

Cum $1+xy > 0$ avem $x+y > -1-xy$, $x+y+1+xy > 0$,

$(x+1)(1+y) > 0$ adevarat deoarece $x > -1$, $y > -1$ 1 p

$x+y < 1+xy$, $x+y-1-xy < 0$,

$(x-1)(1-y) < 0$ adevarat deoarece $x < 1$, $y < 1$ 1 p

$$\begin{aligned} \text{c) } -1 < \frac{x+y}{1+xy} < 1 \quad \text{avem } \frac{x+y}{1+xy} > -1 \quad \text{și } \frac{x+y}{1+xy} < 1 \\ \frac{x+y}{1+xy} + 1 > 0, \quad \frac{x+y+1+xy}{1+xy} > 0, \quad \frac{(x+1)(y+1)}{1+xy} > 0 \\ \frac{x+y}{1+xy} - 1 < 0, \quad \frac{x+y-1-xy}{1+xy} < 0, \quad \frac{(x-1)(1-y)}{1+xy} < 0 \end{aligned}$$

Dacă $1+xy > 0$ atunci propozitia este adevarata..... 1 p

Dacă $1+xy < 0$, atunci propozitia este falsa

(exemplu $x = 2$, $y = -3$ atunci $\frac{x+y}{1+xy} = \frac{2-3}{1-6} = \frac{1}{5} \in (-1, 1)$)2 p



**OLIMPIADA DE MATEMATICĂ - CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ
APLICATĂ ADOLF HAIMOVICI
FAZA LOCALĂ 17.02.2020
CLASA A IX-A**

SUBIECTUL I (7puncte)

(2p) a) Să se arate că $\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{6}} + \frac{\sqrt{4}-\sqrt{3}}{\sqrt{12}} + \dots + \frac{\sqrt{8}-\sqrt{7}}{\sqrt{56}} < 1$

(2p) b) Demonstrați că $(\sqrt{7-4\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{7+4\sqrt{3}}}) \cdot (4+2\sqrt{3}) \in N$

(3p) c) Se consideră numărul $x_n = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{n(n+1)}$, $n \in N^*$. Să se determine n astfel încât $\{x_n\} = 0,9$.

SUBIECTUL II (7puncte)

Demonstrați că $\frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{2 \cdot 4} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \dots + \frac{1}{(n-1)(n+1)} = \frac{3}{4} - \frac{2n+1}{2n(n+1)}$, $\forall n \geq 2$ cu $n \in N$:

(3p) a) folosind egalitatea $\frac{1}{(n-1)(n+1)} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+1} \right)$, $\forall n \geq 2$;

(4p) b) prin inducție matematică.

SUBIECTUL III (7puncte)

Se consideră șirul $(a_n)_{n \geq 1}$ având suma primilor n termeni $S_n = \frac{3n^2 + 7n}{2}$, $n \in N^*$.

(3p) a) Arătați că $a_n = 3n + 2$.

(2p) b) Arătați că $(a_n)_{n \geq 1}$ este o progresie aritmetică și aflați-i rația.

(2p) c) Aflați $a_k + a_{n-k+1}$.

**SUBIECTUL IV (7puncte)**

Se consideră triunghiul ABC dreptunghic în A și M mijlocul ipotenuzei [BC].

(2p) a) Construiți punctul E, astfel încât $\overrightarrow{AE} = -\overrightarrow{AB}$ și punctul D, astfel încât $\overrightarrow{MD} = \overrightarrow{AM}$.

(2p) b) Dacă $|\overrightarrow{BC}| = a$, calculați $|\overrightarrow{CE}|$.

(3p) c) Arătați că $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{DA} = 2\overrightarrow{ME}$.

Notă: Toate subiectele sunt obligatorii.

Timp de lucru 3 ore.

Fiecare subiect se notează de la 0 la 7 puncte.

BAREM DE CORECTARE SI NOTARE**CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ ADOLF HAIMOVICI****Clasa a IX a - Faza locală 17.02.2020**

- Nu se acordă puncte din oficiu.
- Pentru orice soluție corectă, diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
- Fiecare exercițiu este punctat de la 0 la 7.

Subiectul I.

$$\begin{aligned} \text{a) } \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{6}} + \frac{\sqrt{4}-\sqrt{3}}{\sqrt{12}} + \dots + \frac{\sqrt{8}-\sqrt{7}}{\sqrt{56}} &= \\ \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{6}} - \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{6}} + \frac{\sqrt{4}}{\sqrt{12}} - \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{12}} + \dots + \frac{\sqrt{8}}{\sqrt{56}} - \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{56}} &= \quad 1p \\ 1 - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{4}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{7}} - \frac{1}{\sqrt{8}} = 1 - \frac{1}{\sqrt{8}} < 1 & \quad 1p \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } (\sqrt{7-4\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{7+4\sqrt{3}}}) \cdot (4+2\sqrt{3}) &= \frac{\sqrt{(7-4\sqrt{3})(7+4\sqrt{3})} + 1}{\sqrt{7+4\sqrt{3}}} \cdot (4+2\sqrt{3}) = \\ \frac{2}{\sqrt{7+4\sqrt{3}}} (4+2\sqrt{3}) &= \quad 1p \\ \frac{2}{\sqrt{(\sqrt{3}+2)^2}} \cdot 2(\sqrt{3}+2) &= 4 \in N \quad 1p \end{aligned}$$

$$\text{c) } x_n = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} = \quad 1p$$



$$= \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} =$$

$$= 1 - \frac{1}{n+1} = \frac{n}{n+1}$$

2p

$$\frac{n}{n+1} = 0,9 \Rightarrow n = 9$$

Subiectul II.

- a) Egalitatea se demonstrează prin calcul.

$$\frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{2 \cdot 4} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \dots + \frac{1}{(n-1)(n+1)} =$$

$$= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} - \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) =$$

$$= \frac{3n^2 - n - 2}{4n(n+1)} = \frac{3}{4} - \frac{2n+1}{2n(n+1)}$$

2p

1p

- b) Egalitatea se demonstrează prin inducție matematică.

Etapă de verificare

1p

Etapă demonstrației

3p

Subiectul III.

- a)
- $a_n = S_n - S_{n-1} = 3n + 2$
- și

2p

$$a_1 = S_1 = 5, \text{ deci } a_n = 3n + 2$$

1p

- b)
- $a_{n+1} - a_n = r$

1p

$$r = 3$$

1p

- c)
- $a_1 + a_n = 3n + 7$

1p

$$a_k + a_{n-k+1} = 3n + 7$$

1p

Subiectul IV.

- a) E este simetricul lui B față de A,

1p

iar D este simetricul lui A față de M

1p

- b) CA și EB sunt perpendiculare, EA = AB.

1p

$$\text{Atunci } |\vec{CE}| = |\vec{CB}| = a$$

1p

$$\text{c) } \vec{MA} + \vec{MC} + \vec{BA} + \vec{DA} = \vec{ME} + \vec{EA} + \vec{ME} + \vec{EC} + \vec{BA} + \vec{DA} =$$

$$= 2\vec{ME}$$

2p

1p



OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ
FAZA LOCALĂ 17.02.2020
CLASA A X-A
Matematică-informatică

SUBIECTUL I(7puncte)

Fie $a = \left(\frac{2}{\sqrt{7} + \sqrt{5}} + \frac{4}{\sqrt{5} - 1} \right)^{-1}$ și $b = \sqrt{17 - 4\sqrt{9 + 4\sqrt{5}}}$

(2p) a) Să se aducă numărul a la o formă mai simplă.

(2p) b) Să se arate că $b = \sqrt{5} - 2$

(3p) c) Arătați că $a > b$.

SUBIECTUL II (7puncte)

(3p) a) Să se demonstreze egalitatea:

$$\frac{1}{\log_2 1 + \dots + \log_2 2020} + \frac{1}{\log_3 1 + \dots + \log_3 2020} + \dots + \frac{1}{\log_{2020} 1 + \dots + \log_{2020} 2020} = 1.$$

(4p) b) Să se calculeze $\lceil \log_2 2020 \rceil + \lceil \log_2 2024 \rceil + \lceil \log_2 2028 \rceil + \dots + \lceil \log_2 2048 \rceil$, unde $\lceil a \rceil$ reprezintă partea întreagă a numărului real a .



SUBIECTUL III (7puncte)

Fie numărul complex $z = \sqrt{2+\sqrt{2}} + i\sqrt{2-\sqrt{2}}$.

(2p) a) Arătați că numărul $\frac{\operatorname{Im}(z)}{\operatorname{Re}(z)}$ este subunitar.

(2p) b) Calculați $u(|z|^{2020})$, unde $u(a)$ reprezintă ultima cifră a numărului a .

(3p) c) Deduceți că $\frac{z}{\bar{z}} + \frac{\bar{z}}{z} \in \mathbb{R}$, unde $\bar{z}$ este conjugatul numărului complex z .

SUBIECTUL IV (7puncte)

(3p) a) Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuația $\sqrt[3]{\sqrt{x}+3} + \sqrt[3]{13-\sqrt{x}} = 4$.

(4p) a) Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuația $\sqrt{x} - \sqrt[3]{x-8} = 2$.

Notă: Toate subiectele sunt obligatorii.

Timp de lucru 3 ore.

Fiecare subiect se notează de la 0 la 7 puncte.

BAREM DE CORECTARE SI NOTARE

Clasa a X a - Matematică-informatică

Olimpiada de matematică - Faza locală 17.02.2020

- Nu se acordă puncte din oficiu.
- Pentru orice soluție corectă, diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
- Fiecare exercițiu este punctat de la 0 la 7.

**Subiectul I.**

$$a) \ a = \left(\frac{2}{\sqrt{7} + \sqrt{5}} + \frac{4}{\sqrt{5} - 1} \right)^{-1} = \frac{1}{\sqrt{7} + 1} = \frac{\sqrt{7} - 1}{6} \quad 2p$$

$$b) \ b = \sqrt{17 - 4\sqrt{9 + 4\sqrt{5}}} = \sqrt{17 - 4(2 + \sqrt{5})} = \quad 1p$$

$$= \sqrt{9 - 4\sqrt{5}} = |2 - \sqrt{5}| = \sqrt{5} - 2 \quad 1p$$

$$c) \ a > b \Leftrightarrow \sqrt{7} + 11 > 6\sqrt{5} \quad 1p$$

$$\Leftrightarrow 11\sqrt{7} > 26 \Leftrightarrow 847 > 676 \quad 2p$$

Subiectul II.

$$a) \ \text{not } \ddot{a}m \ 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot 2020 = a$$

$$\frac{1}{\log_2 1 + \dots + \log_2 2020} + \frac{1}{\log_3 1 + \dots + \log_3 2020} + \dots + \frac{1}{\log_{2020} 1 + \dots + \log_{2020} 2020} =$$

$$\frac{1}{\log_2 a} + \frac{1}{\log_3 a} + \dots + \frac{1}{\log_{2020} a} =$$

$$= \log_a 2 + \log_a 3 + \dots + \log_a 2020 = 1 \quad 1p$$

2p

$$b) \ 1024 = 2^{10}, \ 2048 = 2^{11}$$

$$1024 < 2020 < 2024 < 2028 < \dots < 2044 < 2048 \quad 1p$$

$$[\log_2 2020] = [\log_2 2024] = \dots = [\log_2 2044] = 10 \quad 1p$$

$$[\log_2 2048] = 11$$

$$[\log_2 2020] + [\log_2 2024] + [\log_2 2028] + \dots + [\log_2 2048] = \quad 1p$$

$$= 7 \cdot 10 + 11 = 81 \quad 1p$$

Subiectul III.

$$a) \ \frac{Imz}{Rez} = \frac{\sqrt{2 - \sqrt{2}}}{\sqrt{2 + \sqrt{2}}} = \sqrt{\frac{2 - \sqrt{2}}{2 + \sqrt{2}}} = \sqrt{3 - 2\sqrt{2}} = \sqrt{2} - 1 \quad 1p$$

$$\sqrt{2} - 1 < 1 \quad 1p$$

$$b) \ |z| = 2, \ |z|^{2020} = 2^{2020} \quad 1p$$

$$u(2^{2020}) = 6 \quad 1p$$

$$c) \ z \cdot \bar{z} = 4 \quad 1p$$

$$z^2 + \bar{z}^2 = 4\sqrt{2} \quad 1p$$

$$\frac{z}{\bar{z}} + \frac{\bar{z}}{z} = \sqrt{2} \in R \quad 1p$$



Subiectul IV.

a) Ridicăm la cub și obținem $\sqrt[3]{(\sqrt{x}+3)(13-\sqrt{x})}=4$

2p

Ridicăm din nou la cub și obținem $x-10\sqrt{x}+25=0$

$$(\sqrt{x}-5)^2=0 \Rightarrow x=25$$

1p

b) Condiția de existență a radicalului de ordin 2 este $x \geq 0$.

1p

Se notează $\sqrt{x} = y \Rightarrow x = y^2$. Înlocuind pe x în ecuație se obține

1p

$$y - \sqrt[3]{y^2-8} = 2. \text{ Rezultă că } (y-2)^3 = y^2 - 8 \Rightarrow$$

$$y^3 - 7y^2 + 12y = 0 \Rightarrow y(y^2 - 7y + 12) = 0$$

1p

Se obține $y_1 = 0, y_2 = 4, y_3 = 3$.

Revenind la notații se obțin soluțiile ecuației inițiale

$$x_1 = 0, x_2 = 16, x_3 = 9$$

1p



**OLIMPIADA DE MATEMATICĂ - CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ
APLICATĂ ADOLF HAIMOVICI
FAZA LOCALĂ 17.02.2020
CLASA A X-A**

SUBIECTUL I (7puncte)

Fie numerele iraționale : $a = 9 + 4\sqrt{5}$, $b = 9 - 4\sqrt{5}$. Arătați că:

(4p) a) ab și $(a+b)$ sunt numere naturale.

(3p) b) $(a-b)$, $\sqrt{a}$, $\sqrt{b}$ sunt numere iraționale.

SUBIECTUL II (7puncte)

(3p) a) Să se calculeze: $(1-i)(1-i^2)(1-i^3)\dots(1-i^{2020})$, unde $i^2 = -1$.

(2p) b) Să se calculeze $1+i+i^2+\dots+i^{2020}$.

(2p) c) Să se determine un număr complex z astfel încât $z+3\bar{z}=4+6i$.

SUBIECTUL III (7puncte)

Dacă $a \in (0,1) \cup (1,+\infty)$ și n un număr natural nenul, arătați că:

$$\frac{1}{\log_a 5 \log_a 25} + \frac{1}{\log_a 25 \log_a 125} + \dots + \frac{1}{\log_a 5^n \log_a 5^{n+1}} = \frac{n}{n+1} \cdot \frac{1}{\log_{a5}^2}.$$

SUBIECTUL IV (7puncte)

Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuațiile:

(4p) a) $\sqrt{\frac{x-2}{x+3}} + \sqrt{\frac{x+3}{x-2}} = \frac{13}{6}$

(3p) b) $(2+\sqrt{3})^x + (2-\sqrt{3})^x = 1$.

Notă: Toate subiectele sunt obligatorii.

Timp de lucru 3 ore.

Fiecare subiect se notează de la 0 la 7 puncte.



BAREM DE CORECTARE SI NOTARE
CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ ADOLF HAIMOVICI
Clasa a X a -- Faza locală 17.02.2020

- Nu se acordă puncte din oficiu.
- Pentru orice soluție corectă, diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
- Fiecare exercițiu este punctat de la 0 la 7.

Subiectul I.

- a) $a \cdot b = 1 \in \mathbb{N}$ 2p
 $a + b = 18$ 2p
b) $a - b = 8\sqrt{5}$ 1p

$$\sqrt{a} = 2 + \sqrt{5} \quad 1p$$

$$\sqrt{b} = \sqrt{5} - 2 \quad 1p.$$

Subiectul I.

- a) calcul direct 3p
b) calcul , rezultatul fiind 1 2p
c) $z = a + bi$, unde $a = 1$ și $b = -3$ 2p

Subiectul III.

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\log_a 5 \cdot \log_a 5^2} + \frac{1}{\log_a 5^2 \cdot \log_a 5^3} + \dots + \frac{1}{\log_a 5^n \cdot \log_a 5^{n+1}} = \\ & = \frac{1}{1 \cdot 2 \log_a 5 \cdot \log_a 5} + \dots + \frac{1}{n(n+1) \log_a 5 \log_a 5} = \\ & \left(\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} \right) \cdot \frac{1}{\log_a 5 \log_a 5} = \\ & \left[\left(1 - \frac{1}{2} \right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) + \dots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) \right] \cdot \frac{1}{\log_a 5 \cdot \log_a 5} = \\ & \left(\frac{n}{n+1} \right) \cdot \frac{1}{\log_a 5 \log_a 5}. \end{aligned} \quad 7p.$$

Subiectul IV.

a) C.E. $\frac{x-2}{x+3} \geq 0, \frac{x+3}{x-2} \geq 0 \rightarrow x \in (-\infty, -3) \cup (2, +\infty) = D$ 1p

Not. $\sqrt{\frac{x-2}{x+3}} = t$, ecuația devine $t + \frac{1}{t} = \frac{13}{6}$ cu soluțiile $t_1 = \frac{2}{3}, t_2 = \frac{3}{2}$ 2p

Pentru $t_1 = \frac{2}{3} \rightarrow x_1 = 6$ și $t_2 = \frac{3}{2} \rightarrow x_2 = -7$ 1p.

b) not. $(2 + \sqrt{3})^x = t \rightarrow t + \frac{1}{t} = 14 \rightarrow t^2 - 14t + 1 = 0$ 2p

după înlocuire se obține $x_1 = -2$, $x_2 = 2$.

1p.

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ
FAZA LOCALĂ 17.02.2020
CLASA A XI-A
Matematică-informatică

SUBIECTUL I (7puncte)

Fie matricea $A(a) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ a & 3 & 1 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$, $a \in \mathbb{R}$

$${}^t(A^2) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4043 \\ 0 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

4p a) Determinați numărul real a pentru care avem egalitatea unde am notat cu tX transpusa matricei X .

3 b) Calculați A^{2020} .

SUBIECTUL II (7puncte)

$$a, b, c \in \mathbb{N} \quad \Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} \text{ și determinanții:}$$

Se consideră numerele reale

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ f(a) & f(b) & f(c) \end{vmatrix}, \text{ unde } f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^2 + 2x + 3.$$

3 a) Să se arate că $\Delta_1 = (a-b)(b-c)(c-a)$.

2 b) Să se verifice dacă $\Delta_1 = \Delta_2$.

2 c) Să se arate că aria triunghiului care are ca vârfuri 3 puncte distincte situate pe graficul funcției, având coordonate numere naturale, este număr natural.

SUBIECTUL III (7puncte)

Se consideră șirul $(a_n)_{n \geq 1}$ definit de $a_n = \frac{1+2+\dots+n}{1^2+2^2+\dots+n^2}$, $n \in \mathbb{N}^*$.

4 a) Calculați $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n}{3} \cdot a_n \right)^{n-1}$.

3 b) Aflați $p \in \mathbb{R}$ pentru care $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\operatorname{tg}(p \cdot a_n)}{\ln(1+(1+p) \cdot a_n)} \right) = \frac{2020}{2021}$.

SUBIECTUL IV (7 puncte)

Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x^2 - 4x + 3}{\sqrt{ax^2 + bx + 2020}} - x$, unde $a, b \in \mathbb{R}$. Determinați parametrii



reali a și b astfel încât graficul funcției să admită ca asimptotă orizontală la $+\infty$ dreapta $y=1$

Notă: Toate subiectele sunt obligatorii.

Țimp de lucru 3 ore.

Fiecare subiect se notează de la 0 la 7 puncte.

BAREM DE CORECTARE SI NOTARE

Clasa a XI a - Matematică-informatică

Olimpiada de matematică - Faza locală 17.02.2020

- Nu se acordă puncte din oficiu.
- Pentru orice soluție corectă, diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
- Fiecare exercițiu este punctat de la 0 la 7.

SUBIECTUL I

a) $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 2a+3 & 6 & 1 \end{pmatrix}$ 2p

${}^t(A^2) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4043 \\ 0 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow a = 2020$ 2p

b) $A(a) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ a & 3 & 1 \end{pmatrix} = I_3 + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ a & 3 & 0 \end{pmatrix}$ 1p

B

$B^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ 1p

Calculul $B^3 = O_3$

$A^{2020} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2020 & 1 & 0 \\ 3 \cdot 1010 \cdot 2019 + 2020a & 6060 & 1 \end{pmatrix}$ 1p

SUBIECTUL II

a) $\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} \stackrel{C_2-C_1}{\stackrel{C_3-C_1}{=}} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & b-a & c-a \\ a^2 & b^2-a^2 & c^2-a^2 \end{vmatrix} = (b-a)(c-a) \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ b+a & c+a \end{vmatrix}$ 2p

$\Delta_1 = (a-b)(b-c)(c-a)$ 1p

b) $\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2+2a+3 & b^2+2b+3 & c^2+2c+3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ 2a & 2b & 2c \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ 3 & 3 & 3 \end{vmatrix} =$ 1p



$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} = \Delta_1$$

1p

c)

$$A(a, f(a)), B(b, f(b)), C(c, f(c)) \Leftrightarrow A_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} a & f(a) & 1 \\ b & f(b) & 1 \\ c & f(c) & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2} |(a-b)(b-c)(c-a)|$$

1p

Fie

$a, b, c \in \mathbb{N}$, deci cel puțin 2 au aceeași paritate $\Rightarrow$ diferența lor este nr par $\Rightarrow A \in \mathbb{N}$

1p

SUBIECTUL III

a)

$$a_n = \frac{1+2+\dots+n}{1^2+2^2+\dots+n^2} = \frac{3}{2n+1}$$

1p

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n}{3} \cdot a_n \right)^{n-1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n}{2n+1} \right)^{n-1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{-1}{2n+1} \right)^{n-1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{-1}{2n+1} \right)^{\frac{2n+1}{-1}} \right]^{\frac{-1}{2n+1} (n-1)} = e^{-\frac{1}{2}}$$

3p

b)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\operatorname{tg}(p \cdot a_n)}{\ln(1+(1+p) \cdot a_n)} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\frac{\operatorname{tg}(p \cdot a_n)}{p \cdot a_n} \cdot p \cdot a_n}{\frac{\ln(1+(1+p) \cdot a_n)}{(1+p) \cdot a_n} \cdot (1+p) \cdot a_n} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{p \cdot a_n}{(1+p) \cdot a_n} \right) = \frac{p}{p+1} = \frac{2020}{2021}$$

2p

$$\Leftrightarrow p = 2020$$

SUBIECTUL IV

Trebuie ca $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 1$

1p

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} x \left(\frac{1 - \frac{4}{x} + \frac{3}{x^2}}{\sqrt{a + \frac{b}{x} + \frac{2020}{x^2}}} - 1 \right) = \frac{1}{\sqrt{a}} \lim_{x \rightarrow \infty} x \left(1 - \frac{4}{x} + \frac{3}{x^2} - \sqrt{a + \frac{b}{x} + \frac{2020}{x^2}} \right) =$$

1p

$$\frac{1}{\sqrt{a}} \lim_{x \rightarrow \infty} \left[x \left(1 - \sqrt{a + \frac{b}{x} + \frac{2020}{x^2}} \right) - 4 + \frac{3}{x} \right] = \frac{1}{\sqrt{a}} \left[-4 + \lim_{x \rightarrow \infty} x \left(1 - \sqrt{a + \frac{b}{x} + \frac{2020}{x^2}} \right) \right]$$

1p

Pentru ca $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 1 \Leftrightarrow 1 - \sqrt{a} = 0 \Leftrightarrow a = 1$

1p

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \frac{1}{\sqrt{1}} \left(-4 + \lim_{x \rightarrow \infty} x \left(1 - \sqrt{1 + \frac{b}{x} + \frac{2020}{x^2}} \right) \right) = -4 + \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x \left(1 - 1 - \frac{b}{x} - \frac{2020}{x^2} \right)}{1 + \sqrt{1 + \frac{b}{x} + \frac{2020}{x^2}}} = -4 + \frac{-b}{2} = 1$$

2p

Finalizare $a = 1$ și $b = -10$

1p



**OLIMPIADA DE MATEMATICĂ - CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ
APLICATĂ ADOLF HAIMOVICI
FAZA LOCALĂ 17.02.2020
CLASA A XI-A**

SUBIECTUL I (7puncte)

Fie $M = \{A(x) \in M_2(\mathbb{R}) \mid A(x) = I_2 + x \cdot B\}$ și $B = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$

2 a) Calculați B^2 .

p

2 a) Arătați că $(\forall) x, y \in \mathbb{R}$ avem $A(x) \cdot A(y) = A(xy + x + y)$.

p

3 b) Calculați $\det(A^2(x) - (x+2) \cdot A(x) + (x+1) \cdot I_2)$.

p**SUBIECTUL II(7puncte)**

Se consideră matricea $A(a, b) = \begin{pmatrix} a & 4b & 1 \\ a & 2a & b \\ 2 & 6 & 1 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$

2 a) Arătați că $\det(A^2(a; b)) \geq 0$, pentru orice numere reale a și b .

p

5 b) Demonstrați că dacă numerele m, n sunt întregi și impare, atunci $\det(A(m, n)) \neq 0$.

p**SUBIECTUL III(7puncte)**

Fie funcția $f: (0; \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} \log_2 x & , 0 < x \leq 1 \\ ax + b & , x \in (1; 2) \\ ax^2 + bx + 2 & , x \geq 2 \end{cases}$

4 a) Să se determine constantele reale a și b pentru care funcția are limită în punctele $x_0 \in \{1; 2\}$.

p

3 b) $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} (f(1010x) - \log_2(\operatorname{arctg} 2020x))$

p

Calculați

SUBIECTUL IV(7puncte)

Se considera funcția $f: (0; \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x(\sqrt{x^2 + bx + c} - ax)$, unde $a, b \in \mathbb{R}_+$.

Determinați parametrii reali a și b astfel încât graficul funcției să admită ca asimptotă oblică la $+\infty$ dreapta $y = x + 2020$



Notă: Toate subiectele sunt obligatorii.

Timp de lucru 3 ore.

Fiecare subiect se notează de la 0 la 7 puncte.

BAREM DE CORECTARE SI NOTARE
CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ ADOLF HAIMOVICI
Clasa a XI a -- Faza locală 17.02.2020

- Nu se acordă puncte din oficiu.
- Pentru orice soluție corectă, diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
- Fiecare exercițiu este punctat de la 0 la 7.

SUBIECTUL I

c) Calculul $B^2 = B$. 2p

d) $A(x) \cdot A(y) = (I_2 + xB)(I_2 + yB) = I_2 + xB + yB + xyB^2$ 1p

$$= I_2 + (x + y + xy)B = A(xy + x + y) \quad (\forall) x, y \in \mathbb{R} \quad 1p$$

e) $Tr(A(x)) = x + 2$ și $\det(A(x)) = x + 1$ 1p

Cum $A(x) \in M_2(\mathbb{R})$, din ecuației lui HAMILTON CAYLEY avem 2p

$$A^2(x) - (x + 2) \cdot A(x) + (x + 1) \cdot I_2 = O_2, \text{ deci}$$

$$\det(A^2(x) - (x + 2) \cdot A(x) + (x + 1) \cdot I_2) = \det(O_2) = 0$$

SUBIECTUL II

d) $\det(A^2(a; b)) = (\det A(a; b))^2 \geq 0, (\forall) a; b \in \mathbb{R}$ 2p

e) $\det(A(m, n)) = \begin{vmatrix} m & 4n & 1 \\ m & 2m & n \\ 2 & 6 & 1 \end{vmatrix} = 2(m^2 + 4n^2 - 5mn + m)$ 3p

$$\Rightarrow \begin{cases} m^2 \text{ este impar} \\ 4n^2 \text{ este par} \\ -5mn \text{ este impar} \\ m \text{ este impar} \end{cases} \Leftrightarrow m^2 + 4n^2 - 5mn + m \text{ este impar} \quad 2p$$

Dacă m și n sunt întregi impare



$$\Leftrightarrow \det(A(m, n)) \neq 0$$

SUBIECTUL III

c) Trebuie ca limitele laterale in punctele $x_0 = \{2; 4\}$ sa fie egale **1p**

$$\left. \begin{aligned} \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} f(x) &= \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} \log_2 1 = 0 \\ \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} f(x) &= \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} ax + b = a + b \end{aligned} \right\} \Leftrightarrow a + b = 0$$

$$\left. \begin{aligned} \lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x < 2}} f(x) &= \lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x < 2}} ax + b = 2a + b \\ \lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x > 2}} f(x) &= \lim_{\substack{x \rightarrow 4 \\ x > 4}} ax^2 + bx + 2 = 4a + 2b + 2 \end{aligned} \right\} \Leftrightarrow 2a + b = 4a + 2b + 2$$

Finalizare $a = -2$ si $b = 2$

d) $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} (f(1010x) - \log_2(\operatorname{arctg} 2020x)) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} (\log_2(1010x) - \log_2(\operatorname{arctg} 2020x))$ **1p**

$$= \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \left(\log_2 \left(\frac{1010x}{\operatorname{arctg} 2020x} \right) \right) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \left(\log_2 \left(\frac{1010x}{\frac{\operatorname{arctg} 2020x}{2020x} \cdot 2020x} \right) \right) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \left(\log_2 \left(\frac{1010x}{2020x} \right) \right) = \log$$

SUBIECTUL IV

Trebuie ca $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = 1$ **1p**

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x(\sqrt{x^2 + bx + c} - ax)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{x^2 + bx + c} - ax = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + bx + c - a^2 x^2}{\sqrt{x^2 + bx + c} + ax} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2(1 - a^2) + bx + c}{\sqrt{x^2 + bx + c} + ax} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x \left(x(1 - a^2) + b + \frac{c}{x} \right)}{x \left(\sqrt{1 + \frac{b}{x} + \frac{c}{x^2}} + a \right)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x(1 - a^2) + b}{1 + a} = 1$$

$$\text{Pentru ca } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = 1 \Leftrightarrow 1 - a^2 = 0 \stackrel{a > 0}{\Leftrightarrow} a = 1 \quad \frac{b}{2} = 1 \Leftrightarrow b = 2$$

Trebuie ca $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) - x = 2020$ **1p**

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (x\sqrt{x^2 + 2x + c} - (x^2 + x)) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^4 + 2x^3 + cx^2 - x^4 - 2x^3 - x^2}{x\sqrt{x^2 + 2x + c} + (x^2 + x)} \right) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2(c - 1)}{x^2 \left(\sqrt{1 + \frac{2}{x} + \frac{c}{x^2}} + 1 + \frac{1}{x} \right)} \right) = 2020$$

Deci $c = 4041$

2p



OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ
FAZA LOCALĂ 17.02.2020
CLASA A XII-A
Matematică-informatică

SUBIECTUL 1(7puncte)

Pe mulțimea numerelor complexe se consideră legea de compoziție $x \circ y = xy - i(x + y) - 1 + i$

și, pentru orice număr complex x se notează $x_n = \underbrace{x \circ x \circ \dots \circ x}_{n \text{ de } x}, \forall n \geq 2, n \in \mathbb{N}$.

(2p) a) Determinați numerele reale a și b pentru care $(3 - i) \circ (3 + i) = a + bi$.

(2p) b) Determinați elementul neutru al legii " $\circ$ ".

(3p) c) Calculați $(-1 + i)^{2020}$.

SUBIECTUL 2(7puncte)

(7p) Să se arate că mulțimea $M = \left\{ \begin{pmatrix} x+4y & 2y \\ -7y & x-4y \end{pmatrix} \mid x, y \in \mathbb{R}, x \neq 0, x^2 - 2y^2 = 1 \right\}$ formează o structură de grup în raport cu înmulțirea matricelor.

SUBIECTUL 3(7puncte)

Se consideră funcțiile $f: [0; \infty) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x \cdot \cos x + \sin x$ și $g: (0; \infty) \rightarrow \mathbb{R}, g(x) = \ln x$.

(2p) a) Calculați $\int_0^{\pi} f(x) dx$

(2p) b) Calculați $\int_1^e \frac{g(x)}{\sqrt{x}} dx$.

(3p) c) Arătați că numărul $A = \int_{\pi}^{2\pi} f(x) \cdot g(x) dx$ este întreg.

**SUBIECTUL 4(7puncte)**

Se consideră șirul $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $I_n = \int_n^{n+1} \frac{x}{1+x^2} dx$.

(2p) a) Arătați că $I_0 < \frac{1}{2}$.

(2p) b) Calculați $\lim_{n \rightarrow \infty} I_n$.

(3p) c) Calculați $\lim_{n \rightarrow \infty} n \cdot I_n$.

Notă: Toate subiectele sunt obligatorii.

Timp de lucru 3 ore.

Fiecare subiect se notează de la 0 la 7 puncte.

BAREM DE CORECTARE SI NOTARE**Clasa a XII a - Matematică-informatică****Olimpiada de matematică - Faza locală 17.02.2020**

- Nu se acordă puncte din oficiu.
- Pentru orice soluție corectă, diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
- Fiecare exercițiu este punctat de la 0 la 7.

SUBIECTUL 1

Obs $x \circ y = (x-i)(y-i) + i$, $\forall x, y \in \mathbb{C}$

a) $(3-i) \circ (3+i) = 9-5i$ 1p

$a=9, b=-5$ 1p

b) $e=1+i \in \mathbb{C}$ 2p

$x_n = x \cdot x \cdot \dots \cdot x$ n de x $x = (x-i)^n + i$, $\forall x \in \mathbb{C}$

c)inducție.....2p

$(-1+i)_{2020} = (-1+i-i)^{2020} + i = 1+i$ 1p

SUBIECTUL 2

$A(x, y) = \begin{pmatrix} x+4y & 2y \\ -7y & x-4y \end{pmatrix} = x \cdot I_2 + y \cdot B$, unde $B = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -7 & -4 \end{pmatrix}$, $B^2 = 2I_2$,

$\det(A(x, y)) = x^2 - 2y^2 = 1$

Parte stabilă

$A(x, y) \cdot A(a, b) = A(xa + 2yb, xb + ya)$ 2p

$\det(A(x, y) \cdot A(a, b)) = \det(A(xa + 2yb, xb + ya)) = \det A(x, y) \cdot \det A(a, b) = 1$ 1p

$xa + 2yb, xb + ya \in \mathbb{R}$, $xa + 2yb \neq 0$ 1p

Asociativitate, este cunoscută

Element neutru $I_2 = A(1, 0) \in M$ 1p

Elemente simetrizabile $(A(x, y))^{-1} = A(x, -y) \in M$ 2p



SUBIECTUL 3

$$\int_0^{\pi} f(x) dx = \int_0^{\pi} (x \cdot \sin x)' dx = x \cdot \sin x \Big|_0^{\pi} = 0$$

a) , sau integrare prin părți.....2p

$$\int_1^e \frac{g(x)}{\sqrt{x}} dx = \int_1^e \frac{\ln x}{\sqrt{x}} dx = 2\sqrt{x} \cdot \ln x \Big|_1^e - 4\sqrt{x} \Big|_1^e = 4 - 2\sqrt{e}$$

b)2p

$$A = \int_{\pi}^{2\pi} f(x) \cdot g(x) dx = \int_{\pi}^{2\pi} (x \cdot \sin x)' \cdot \ln x dx = x \cdot \sin x \cdot \ln x \Big|_{\pi}^{2\pi} - \int_{\pi}^{2\pi} \sin x dx$$

c)2p

$$A = 2\pi \cdot \sin(2\pi) \cdot \ln(2\pi) - \pi \cdot \sin(\pi) \cdot \ln(\pi) + \cos(2\pi) - \cos(\pi) = 2 \in \mathbb{Z}$$

.....1p

SUBIECTUL 4

$$I_0 = \int_0^1 \frac{x}{1+x^2} dx = \frac{1}{2} \ln(x^2 + 1) \Big|_0^1 = \frac{\ln 2}{2}$$

a)1p

$$I_0 < \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{\ln 2}{2} < \frac{1}{2} \Leftrightarrow \ln 2 < \ln e \Leftrightarrow 2 < e$$

adevărat.....1p

$$I_n = \frac{1}{2} \ln(x^2 + 1) \Big|_n^{n+1} = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{n^2 + 2n + 2}{n^2 + 1} \right)$$

b)1p

$$\lim_{n \rightarrow \infty} I_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \ln \left(\frac{n^2 + 2n + 2}{n^2 + 1} \right) = \frac{1}{2} \ln 1 = 0$$

.....1p

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \cdot I_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{2} \ln \left(\frac{n^2 + 2n + 2}{n^2 + 1} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \ln \left(\frac{n^2 + 2n + 2}{n^2 + 1} \right)^{\frac{n}{2}}$$

c)1p

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} n \cdot I_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \ln \left[\left(1 + \frac{2n+1}{n^2+1} \right)^{\frac{n^2+1}{2n+1}} \right]^{\frac{n}{2} \left(\frac{2n+1}{n^2+1} \right)} = \ln e = 1$$

.....2p



**OLIMPIADA DE MATEMATICĂ - CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ
APLICATĂ ADOLF HAIMOVICI
FAZA LOCALĂ 17.02.2020
CLASA A XII-A**

SUBIECTUL 1 (7puncte)

1. Se consideră matricea $A_x = \begin{pmatrix} 1 & 0 & x \\ -x & 1 & \frac{-x^2}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, pentru $x \in \mathbb{R}$ și mulțimea

$$G = \{A_x | x \in \mathbb{R}\} \subset M_3(\mathbb{R})$$

- a) **(3p)** Să demonstreze că $A_x \cdot A_y = A_{x+y}$, unde $x, y \in \mathbb{R}$.
b) **(4p)** Să se arate că $G = \{A_x | x \in \mathbb{R}\}$ este grup în raport cu înmulțirea matricelor.

SUBIECTUL II (7puncte)

- a) **(3p)** Să se rezolve în $\mathbb{Z}_4$ ecuația $2x^3 + 3x + 1 = 0$



- b) **(4p)** Să se rezolve în $\mathbb{Z}_5$ sistemul

SUBIECTUL III (7puncte)

Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f_{(x)} = \begin{cases} x^2 + 1, & x < 0 \\ x e^x + 1, & x \geq 0 \end{cases}$

- a) **(2p)** Arătați că f admite primitive pe $\mathbb{R}$



b) (3p) Calculați $\int_{-1}^1 f(x) dx$.

c) (2p) Să se demonstreze că, dacă funcția $F: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, este o primitivă a funcției $g: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = f(x)$ și se știe că $\int_2^3 f(x) dx = \int_3^4 f(x) dx$, atunci numerele $F(2)$, $F(3)$, $F(4)$ sunt termenii consecutivi ai unei progresii geometrice.

SUBIECTUL IV (7puncte)

Se consideră funcția $f: [-5, 5] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{25 - x^2}$.

c) (2p) Să se arate că $\int_{-1}^1 f^2(x) dx = \frac{148}{3}$

d) (3p) Să se demonstreze egalitatea $\int_{-4}^4 \frac{x}{f(x)} dx = 0$

e) (2p) Demonstrați că $0 \leq \int_0^a f(x) dx \leq 15$, $a \in [0, 3]$.

Notă: Toate subiectele sunt obligatorii.

Timp de lucru 3 ore.

Fiecare subiect se notează de la 0 la 7 puncte.

BAREM DE CORECTARE SI NOTARE

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ ADOLF HAIMOVICI

Clasa a XI a -- Faza locală 17.02.2020

- Nu se acordă puncte din oficiu.
- Pentru orice soluție corectă, diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
- Fiecare exercițiu este punctat de la 0 la 7.

SUBIECTUL I

(3p) a) Demonstrația relației

(4p) b) Demonstrația axiomelor grupului

SUBIECTUL II

(3p) a) Soluția $x=3$

(4p) b) Rezolvarea sistemului

SUBIECTUL III

(2p) a) f este continuă pe intervalele $(-\infty, 0)$ și $(0, \infty)$, f cont. în $x = 0 \Rightarrow f$ -cont. pe $\mathbb{R} \Rightarrow f$ admite primitive pe $\mathbb{R}$.



$$(3p) \text{ b) } \int_{-1}^0 f(x) dx + \int_0^1 f(x) dx = \frac{10}{3}$$

(2p) c) Egalitatea din enunț devine $F(3) - F(2) = F(4) - F(3)$ etc.

SUBIECTUL IV

$$(2p) \text{ a) } f^2(x) \text{ este funcție pară și } 2 \int_0^1 (25 - x^2) dx = \frac{148}{3}$$

$$(3p) \text{ b) } g(x) = \frac{x}{f(x)} \text{ impară} \Rightarrow I = 0$$

$$(2p) \text{ c) } f'(x) \leq 0, x > 0 \Rightarrow 0 \leq f(x) \leq 5 \Rightarrow 0 \leq \int_0^a f(x) dx \leq 15, a \in [0, 3]$$