

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
Faza locală
Braşov, 17 februarie 2023

Clasa a X-a

1. (a) Arătați că funcția $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x + \log_3 x$ este injectivă.
(b) Rezolvați ecuația $x^2 - 3x + 1 + \log_3 \frac{x^2 + 2}{x} = 0$.

Florin Cârstea

2. Fie a, b, c numere complexe având același modul. Dacă $a + b + c = 0$, arătați că $a^2 + b^2 + c^2 = 0$.

Andrei Cațaron

3. (a) Arătați că $x + \frac{4}{x^2} \geq 5$, $\forall x \in (0, 1]$.
(b) Determinați minimul expresiei $a + b + \frac{1}{a \cdot b}$, cu $a, b > 0$ și $a + b \leq 1$.

Romeo Ilie

4. Fie $f : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ o funcție cu proprietatea $f(x + y) \geq f(x) + f(y)$, pentru orice $x, y \in [0, \infty)$.
(a) Arătați că $2^n \geq n + 1$, pentru orice număr natural n .
(b) Arătați că f este crescătoare.
(c) Arătați că $f(x) \geq f(1) \cdot \log_2 x$, pentru orice $x > 0$.

Romeo Ilie

Notă. Toate subiectele sunt obligatorii. Fiecare subiect valorează 7 puncte.
Timp de lucru 3 ore.