Societatea de Ştiinţe Matematice din România

Ministerul Educaţiei Naţionale şi Cercetării Ştiinţifice

Olimpiada Naţională de Matematică
Etapa Finală, Sovata, 20 aprilie 2016
CLASA a VI-a

Enunţuri

Problema 1. Un număr natural se numeşte *superb* dacă este multiplul numărului divizorilor săi (spre exemplu 12 este superb deoarece are 6 divizori şi 12 este multiplu al lui 6).

a) Determinaţi cel mai mare număr superb de două cifre.

b) Demonstraţi că nu există numere superbe care să aibă ultima cifră 3.

Problema 2. Determinaţi numerele naturale nenule a şi b pentru care $\dfrac{a+1}{b}$ şi $\dfrac{b+2}{a}$ sunt simultan numere naturale.

Problema 3. Fie ABC un triunghi dreptunghic în A. Bisectoarea unghiului ACB intersectează latura AB în punctul D şi perpendiculara în B pe BC în punctul E. Notăm cu F simetricul lui E faţă de B şi cu P intersecţia dreptelor DF şi BC. Demonstraţi că $EP \perp CF$.

Problema 4. Fie $a,\ b$ numere naturale nenule pentru care există p număr prim cu proprietatea că $[a, a+p] = [b, b+p]$. Arătaţi că $a = b$.

Am notat $[x, y]$ cel mai mic multiplu comun al numerelor naturale x şi y.

Timp de lucru 2 ore şi 30 de minute.
Fiecare problemă este notată cu 7 puncte.

Soluţii şi bareme, clasa a VI-a

Problema 1.6 Un număr natural se numeşte *superb* dacă este multiplul numărului divizorilor săi (spre exemplu 12 este superb deoarece are 6 divizori şi 12 este multiplu al lui 6).

a) Determinaţi cel mai mare număr superb de două cifre.

b) Demonstraţi că nu există numere superbe care să aibă ultima cifră 3.

Soluţie a) $99 = 3^2 \cdot 11$. 99 are 6 divizori şi $6 \nmid 99$.

$98 = 2 \cdot 7^2$. 98 are 6 divizori şi $6 \nmid 98$.

$97 = 97$. 97 are 2 divizori şi $2 \nmid 97$.

$96 = 2^5 \cdot 3$. 96 are 12 divizori şi $12 \mid 96$.

Cel mai mare număr superb de două cifre este 96. .... 2p

b) Fie X un număr natural cu $u(X) = 3$ ($u(X)$ - ultima cifră a lui X).

Dacă $u(X) = 3$, atunci X este impar. 2p

Pe de altă parte $u(X) = 3$ implică X nu este pătrat perfect, iar un număr care nu este pătrat perfect are un număr par de divizori. 2p

Cum un număr impar nu poate fi multiplul unui număr par deducem că X nu este superb. ... 1p

Problema 2.6 Determinaţi numerele naturale nenule a şi b pentru care $\dfrac{a+1}{b}$ şi $\dfrac{b+2}{a}$ sunt simultan numere naturale.

Soluţie $\dfrac{a+1}{b}$ număr natural nenul implică $b \mid a+1$, de unde $b \le a+1$ şi de aici $b+2 \le a+3$.

Acum $\dfrac{b+2}{a} \le \dfrac{a+3}{a} = 1 + \dfrac{3}{a} \le 4$. Cum $\dfrac{b+2}{a}$ este număr natural nenul rezultă $\dfrac{b+2}{a} \in \{1,2,3,4\}$. 3p

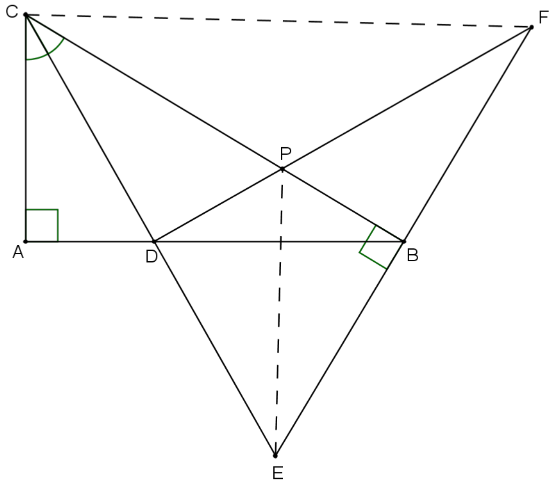
Dacă $\dfrac{b+2}{a} = 1$, atunci din $b+2 = a$ rezultă $b = a-2$. Atunci $\dfrac{a+1}{b}$ număr natural nenul implică $\dfrac{a+1}{a-2} = 1 + \dfrac{3}{a-2}$ număr natural nenul, de unde $a \in \{3,5\}$. Obţinem soluţiile $a = 3, b = 1$ şi $a = 5, b = 3$.

Dacă $\dfrac{b+2}{a} = 2$, atunci din $b+2 = 2a$ rezultă $b = 2a-2$. Atunci $\dfrac{a+1}{b}$ este număr natural nenul, sau $\dfrac{2a+2}{2a-2} = 1 + \dfrac{4}{2a-2}$ este număr natural par, de unde $a \in \{2,3\}$. Obţinem soluţia $a = 3, b = 4$; varianta $a = 2, b = 2$ nu verifică condiţiile iniţiale.

Dacă $\dfrac{b+2}{a} = 3$, atunci din $b+2 = 3a$ rezultă $b = 3a-2$. Atunci $\dfrac{a+1}{b}$ este număr natural nenul, sau $\dfrac{3a+3}{3a-2} = 1 + \dfrac{5}{3a-2}$ este număr natural, de unde $a \in \{1\}$. Obţinem soluţia $a = 1, b = 1$.

Dacă $\dfrac{b+2}{a} = 4$, atunci $b+2 = 4a$ rezultă $b = 4a-2$. Atunci $\dfrac{a+1}{b}$ este număr natural nenul, sau $\dfrac{4a+4}{3a-2} = 1 + \dfrac{6}{4a-2}$ este număr natural par, de unde $a \in \{1,2\}$. Obţinem soluţia $a = 1, b = 2$; varianta $a = 2, b = 6$ nu verifică condiţiile iniţiale. 4p

Problema 3.6. Fie ABC un triunghi dreptunghic în A. Bisectoarea unghiului ACB intersectează latura AB în punctul D şi perpendiculara în B pe BC în punctul E. Notăm cu F simetricul lui E faţă de B şi cu P intersecţia dreptelor DF şi BC. Demonstraţi că $EP \perp CF$.



Soluţie

În $\triangle BEC$, $m(\sphericalangle CEB) = 180° - m(\sphericalangle EBC) - m(\sphericalangle ECB) = 90° - m(\sphericalangle ECB)$
În $\triangle ADC$, $m(\sphericalangle ADC) = 180° - m(\sphericalangle DAC) - m(\sphericalangle ACD) = 90° - m(\sphericalangle ACD)$
Cum $m(\sphericalangle ACD) = m(\sphericalangle ECB)$, rezultă $\sphericalangle ADC \equiv \sphericalangle CEB$ (1) 3p

Dar $\sphericalangle ADC \equiv \sphericalangle EDB$. De aici şi din (1) rezultă $[BD] \equiv [BE]$. Cum $[BE] \equiv [BF]$ deducem că $[BD] \equiv [BE] \equiv [BF]$ şi atunci $\triangle DEF$ este dreptunghic în D. 2p

În $\triangle CEF$, CB şi FD înălţimi implică P ortocentrul. În concluzie, EP este înălţime, adică $EP \perp CF$. 2p

Problema 4.6 Fie a, b numere naturale nenule pentru care există p număr prim cu proprietatea că $[a, a+p] = [b, b+p]$. Arătaţi că $a = b$.

Am notat $[x, y]$ cel mai mic multiplu comun al numerelor naturale x şi y.

Soluţie Din $(x, y) \cdot [x, y] = xy$ deducem $[xy] = \dfrac{xy}{(xy)}$. Am notat (x, y) cel mai mare divizor comun pentru x şi y. Cu aceasta egalitatea din enunţ devine $\dfrac{a(a+p)}{(a, a+p)} = \dfrac{b(b+p)}{(b, b+p)}$. (1) 1p

Notăm $d_1 = (a, a+p) \in \{1, p\}$ şi $d_2 = (b, b+p) \in \{1, p\}$.

Dacă $d_1 = d_2$ relaţia (1) conduce la $a(a+p) = b(b+p)$, de unde $a = b$.

Presupunând $a \neq b$ putem avea $a < b$. Atunci $a + p < b + p$, de unde deducem $a(a+p) < b(b+p)$; contradicţie. Dacă $a > b$, atunci $a + p > b + p$, de unde deducem $a(a+p) > b(b+p)$; contradicţie. 2p

Dacă $d_1 = 1$ şi $d_2 = p$ relaţia (1) devine $a(a+p) = \dfrac{b(b+p)}{p}$ sau $pa(a+p) = b(b+p)$. (2)

Din $d_1 = 1$ deducem că $p \nmid a$ şi $p \nmid a + p$, iar din $d_2 = p$ deducem că $p \mid b$ sau $b = px$, cu x număr natural.

Cu aceasta, relaţia (2) devine $pa(a+p) = p^2 x(x+1)$ sau $a(a+p) = px(x+1)$, de unde deducem că $p \mid a(a+p)$ şi cum p este număr prim rezultă $p \mid a$; contradicţie.

Aceasta arată că situaţia $d_1 = 1$ şi $d_2 = p$ nu este posibilă.

Analog se tratează cazul $d_1 = p$ şi $d_2 = 1$. 4p