

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

Faza locală-14.02.2014

Clasa a XII-a

Soluții

1) Fie $I = \int \frac{\sin x}{2 \sin x + 5 \cos x} dx$ și $J = \int \frac{\cos x}{2 \sin x + 5 \cos x} dx$

$$2I + 5J = \int 1 dx = x + C$$

$$-5I + 2J = \int \frac{-5 \sin x + 2 \cos x}{2 \sin x + 5 \cos x} dx = \ln(2 \sin x + 5 \cos x) + C$$

Obținem $J = \frac{1}{29}(5x + 2 \ln(2 \sin x + 5 \cos x)) + C$ și $I = \frac{1}{29}(2x - 5 \ln(2 \sin x + 5 \cos x)) + C$

Atunci $\int \frac{3 \sin x + \cos x}{2 \sin x + 5 \cos x} dx = 3I + J = \frac{1}{29}(11x - 13 \ln(2 \sin x + 5 \cos x)) + C$

2) Se explicitează funcția și se obține $f(x) = \begin{cases} (x+1)(-x), x \in [-1, 0) \\ x(1-x), x \in [0, 1) \\ 0, x = 1 \end{cases} = \begin{cases} -x^2 - x, x \in [-1, 0) \\ x - x^2, x \in [0, 1] \end{cases}$

Deoarece $\lim_{\substack{x \rightarrow k \\ x < 0}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow k \\ x > 0}} f(x) = f(0) = 0$ se obține că f este continuă pe $[-1, 1]$ și atunci f admite primitive

Primitivele lui f sunt de forma $F(x) = \begin{cases} -\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + c_1, x \in [-1, 0) \\ -\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + c_2, x \in [0, 1] \end{cases}$

Relația $c_1 = c_2$ se obține din continuitatea funcției F

3) Axiomele grupului abelian se verifică cu ușurință folosind, eventual, scrierea $x * y = (x+3)(y+3) - 3$

Egalitatea $\underbrace{x * x * \dots * x}_{\text{de } k \text{ ori}} = x$ este echivalentă cu $(x+3)^k - 3 = x \Leftrightarrow (x+3)[(x+3)^{k-1} - 1] = 0$

Valorile lui $x \in \mathbb{R}$ pentru care există $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$ sunt $-4, -3, -2$

4) Singurul element de ordin 2 din $(\mathbb{Z}_{2p}, +)$ este p

a) Fie $H = \{\hat{0}, 2, 4, \dots, 2p-2\}$

Cum $0 + 2 + \dots + 2p-2 = \frac{p(2p-2)}{2} = p \cdot (p-1)$, rezultă că suma elementelor mulțimii H este $\hat{0}$

Dacă $x, y \in H$ atunci $x - y \neq p$ și atunci H verifică condițiile problemei.

b) Fie $A_0 = \{\hat{0}, p\}$, $A_1 = \{\hat{1}, p+1\}$, ..., $A_{p-1} = \{p-1, 2p-1\}$

Dacă $x, y \in A_k$ atunci $x - y = p$ iar dacă $x \in A_k, y \notin A_k$ atunci $x - y \neq p$

Așadar din fiecare din mulțimile $A_0, A_1, \dots, A_{p-1}$ se alege un element

Presupunem că din $A_1, \dots, A_{p-1}$ s-au ales respectiv $x_1, \dots, x_{p-1}$ și notăm $S_1 = x_1 + \dots + x_{p-1}$

Suma elementelor nealese este $S_2 = p + x_1 + \dots + p + x_{p-1} = S_1$ (sunt număr par de p)

$S_1 + S_2 = \hat{1} + \dots + 2p-1 - p = p - p = \hat{0} \Rightarrow 2S_1 = \hat{0} \Rightarrow S_1 \in \{\hat{0}, p\}$

Dacă $S_1 = \hat{0}$ atunci din A_0 se alege $\hat{0}$, iar dacă $S_1 = p$ atunci din A_0 se alege p

Așadar, numărul de submulțimi este egal cu număr de moduri de alege câte un element din mulțimile $A_1, \dots, A_{p-1}$, adică 2^{p-1}

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

Faza locală-15.02.2014

Clasa a XII-a

Bareme

1) Fie $I = \int \frac{\sin x}{2 \sin x + 5 \cos x} dx$ și $J = \int \frac{\cos x}{2 \sin x + 5 \cos x} dx$ 1p

$2I + 5J = \int 1 dx = x + C$ 1p

$-5I + 2J = \int \frac{-5 \sin x + 2 \cos x}{2 \sin x + 5 \cos x} dx = \ln(2 \sin x + 5 \cos x) + C$ 2p

Obținem $J = \frac{1}{29}(5x + 2 \ln(2 \sin x + 5 \cos x)) + C$ și $I = \frac{1}{29}(2x - 5 \ln(2 \sin x + 5 \cos x)) + C$... 2p

Atunci $\int \frac{3 \sin x + \cos x}{2 \sin x + 5 \cos x} dx = 3I + J = \frac{1}{29}(11x - 13 \ln(2 \sin x + 5 \cos x)) + C$ 1p

2) Se explicitează funcția și se obține $f(x) = \begin{cases} (x+1)(-x), x \in [-1, 0) \\ x(1-x), x \in [0, 1) \\ 0, x = 1 \end{cases} = \begin{cases} -x^2 - x, x \in [-1, 0) \\ x - x^2, x \in [0, 1] \end{cases}$... 1p

Deoarece $\lim_{\substack{x \rightarrow k \\ x < 0}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow k \\ x > 0}} f(x) = f(0) = 0$ se obține că f este continuă pe $[-1, 1]$ și atunci f

admite primitive 2p

Primitivele lui f sunt de forma $F(x) = \begin{cases} -\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + c_1, x \in [-1, 0) \\ -\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + c_2, x \in [0, 1] \end{cases}$ 2p

Relația $c_1 = c_2$ se obține din continuitatea funcției F 2p

3) Axiomele grupului abelian se verifică cu ușurință folosind, eventual, scrierea

$x * y = (x+3)(y+3) - 3$ 4p

Egalitatea $\underbrace{x * x * \dots * x}_{\text{de } k \text{ ori}} = x$ este echivalentă cu $(x+3)^k - 3 = x \Leftrightarrow (x+3)[(x+3)^{k-1} - 1] = 0$... 1p

Valorile lui $x \in \mathbb{R}$ pentru care există $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$ sunt $-4, -3, -2$ 2p

4) Singurul element de ordin 2 din $(\mathbb{Z}_{2p}, +)$ este p 1p

a) Fie $H = \{\hat{0}, 2, 4, \dots, 2p-2\}$ 1p

Cum $0 + 2 + \dots + 2p-2 = \frac{p(2p-2)}{2} = p \cdot (p-1)$, rezultă că suma elementelor mulțimii H

este $\hat{0}$

Dacă $x, y \in H$ atunci $x - y \neq p$ și atunci H verifică condițiile problemei.1p

b) Fie $A_0 = \{\hat{0}, p\}$, $A_1 = \{\hat{1}, p+1\}$, ..., $A_{p-1} = \{p-1, 2p-1\}$ 1p

Dacă $x, y \in A_k$ atunci $x - y = p$ iar dacă $x \in A_k, y \notin A_k$ atunci $x - y \neq p$

Așadar din fiecare din mulțimile $A_0, A_1, \dots, A_{p-1}$ se alege un element.....1p

Presupunem că din $A_1, \dots, A_{p-1}$ s-au ales respectiv $x_1, \dots, x_{p-1}$ și notăm $S_1 = x_1 + \dots + x_{p-1}$

Suma elementelor nealese este $S_2 = p + x_1 + \dots + p + x_{p-1} = S_1$ (sunt număr par de p)

$S_1 + S_2 = \hat{1} + \dots + 2p-1 - p = p - p = \hat{0} \Rightarrow 2S_1 = \hat{0} \Rightarrow S_1 \in \{\hat{0}, p\}$ 1p

Dacă $S_1 = \hat{0}$ atunci din A_0 se alege $\hat{0}$, iar dacă $S_1 = p$ atunci din A_0 se alege p

Așadar, numărul de submulțimi este egal cu număr de moduri de alege câte un element din mulțimile $A_1, \dots, A_{p-1}$, adică 2^{p-1} 1p