

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

Etapa locală - 10.02.2024

Clasa a IX – a

PROBLEMA 1. Fie ABC un triunghi dreptunghic în A . Să se arate că dacă D este proiecția punctului A pe BC , E este punctul de intersecție al bisectoarei unghiului $\widehat{BAC}$ cu BC , iar M este mijlocul ipotenuzei BC , atunci:

- a) $[AE]$ este bisectoarea unghiului $\widehat{MAD}$;
- b) $\overrightarrow{AE} = \left(\frac{a}{b+c}\right)^2 \overrightarrow{AD} + \left(1 - \left(\frac{a}{b+c}\right)^2\right) \overrightarrow{AM}$.

PROBLEMA 2. Se consideră șirul $(x_n)_{n \geq 1}$, definit prin $x_1 = \frac{1}{4}$ și

$$\sqrt{x_{n+1}} + \sqrt{x_n} = \frac{2}{n^2 + 2n}, \text{ pentru } n \geq 1.$$

- a) Să se determine termenul general al șirului;
- b) Să se arate că $\sum_{k=1}^n (2k+1)x_k < 1$, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$.

PROBLEMA 3. Să se rezolve ecuația $\left\{x + \frac{1}{6}\right\} + \left\{x + \frac{3}{6}\right\} + \left\{x + \frac{5}{6}\right\} = \frac{3(2x-1)}{2}$.

Notă. $\{a\}$ reprezintă partea fracționară a numărului a .

PROBLEMA 4. Să se arate că, dacă a , b și c sunt lungimile laturilor unui triunghi, atunci

$$\frac{a}{b+c-a} + \frac{b}{a+c-b} + \frac{c}{a+b-c} \geq 3.$$

¹Timpul efectiv de lucru este de 3 ore;

²Toate problemele sunt obligatorii;

³Fiecare problemă se notează de la 0 la 7.