

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ
16 . 02 . 2020 , CLASA A V A

Barem

PROBLEMA 1

- a) Arătați că numărul $1^2 + 3^2 + 5^2 + 10^2 + 27^2 + 34^2$ este divizibil cu 5 .
 b) Arătați că numărul 2020^{2019} poate fi scris ca sumă de 6 pătrate perfecte.

BAREM :

- a)
 $1^2 + 3^2 + 5^2 + 10^2 + 27^2 + 34^2 = 1 + 9 + 25 + 100 + 729 + 1156 = 2020$ 1 p
 $U(2020) = 0$ deci este divizibil cu 5 1 p
- b)
 $2020^{2019} = 2020 \cdot 2020^{2018} = (1^2 + 3^2 + 5^2 + 10^2 + 27^2 + 34^2) \cdot 2020^{2018} =$ 2 p
 $= 1^2 \cdot 2020^{2018} + 3^2 \cdot 2020^{2018} + 5^2 \cdot 2020^{2018} + 10^2 \cdot 2020^{2018} + 27^2 \cdot 2020^{2018} + 34^2 \cdot$
 $2020^{2018} =$ 2 p
 $(1 \cdot 2020^{1009})^2 + (3 \cdot 2020^{1009})^2 + (5 \cdot 2020^{1009})^2 + (10 \cdot 2020^{1009})^2 + (27 \cdot$
 $2020^{1009})^2 + (34 \cdot 2020^{1009})^2$ 1 p

PROBLEMA 2

- a) Fie numărul $n = 5^{2020} - 5^{2019} + 2 \cdot 5^{2017} + 514 \cdot 5^{2016}$. Aflați ultimele 12 cifre ale numărului n .
 b) Împărțind suma a două numere naturale la cincimea diferenței lor se obține câtul 6 și restul 10. Știind că unul dintre ele este cu 2020 mai mare decât celălalt , să se afle cele două numere.

BAREM :

- a)
 $n = 5^{2020} - 5^{2019} + 2 \cdot 5^{2017} + 514 \cdot 5^{2016} = 5^{2016} \cdot (5^4 - 5^3 + 2 \cdot 5 + 514) =$ 1p
 $= 5^{2016} \cdot 1024 = 5^{2016} \cdot 2^{10} = 5^{2006} \cdot 5^{10} \cdot 2^{10} = 5^{2006} \cdot 10^{10}$ 1p
 Ultimele 12 cifre ale numărului n sunt 250000000000 1p
- b)

Notăm numerele cu a și b .

$$a+b=6\lceil (a-b):5 \rceil +10, \quad 0 \leq 10 < (a-b):5 \quad (1)$$

$$\text{Dar } a = b + 2020 \Rightarrow a - b = 2020 \quad (2) \quad \text{1p}$$

Din (1) și (2) obținem: $a+b=6 \cdot 2020:5+10$

$$a + b = 6 \cdot 404 + 10 \Rightarrow a + b = 2434 \quad (3) \quad 2p$$

Din (2) și (3) obținem: $a = 2227$, $b = 207$ 1p

PROBLEMA 3

Determinați numărul natural $\overline{abbc}$ știind că $a+2b=c$ și b este dublul lui a .

BAREM

a+2b=c și b=2a avem a+4a=c,	1P
5a=c	1P
a și c cifre , vom avea c=5 și a=1(dacă a mai mare decât 1 c nu este cifră, iar a=0 nu se poate)	2p
b=2	2p
$\overline{abbc} = 1225$	1p

PROBLEMA 4

Un elev desenează pe o planșă pe rând , un cerculeț roșu , apoi două cerculețe albastre , trei cerculețe roșii , apoi patru albastre și procedeul continuă.

- a) Aflați câte cerculețe sunt roșii și câte sunt albastre , în primele 100 de cerculețe.
- b) Ce culoare are al 2020-lea cerculeț ?

BAREM :

Numărul de cerculețe crește astfel $1+2+3+\dots+n = n(n+1):2$ 1 p

Cea mai apropiată sumă de 100 este $1+2+3+\dots+13 = 13 \cdot 14:2 = 91$ 1p

Numărul de cerculețe roșii este $1+3+5+7+\dots+13 = 49$, numărul de cerculețe albastre este $100-49=51$. 1p

Estimând suma cea mai apropiată de 2020 avem $1+2+\dots+63 = 2016$ 2p

Ultima grupă completă este impară, deci cu cerculețe roșii, și rămân 4 cerculețe albastre. Deci al 2020 lea cerculeț este albastru. 2p