

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ

Faza locală

Braşov, 9 februarie 2024

Soluţii

Clasa a IX-a

1. Fie numerele reale strict pozitive $a_1, a_2, \dots, a_n$, astfel încât $\frac{a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_k^2}{a_1 + a_2 + \dots + a_k} = \frac{2k+1}{3}$, pentru oricare $k \in \{1, 2, \dots, n\}$. Demonstraţi că $a_1^3 + a_2^3 + \dots + a_n^3 = (a_1 + a_2 + \dots + a_n)^2$.

Romeo Ilie

Soluţie.

Demonstrăm prin metoda inducţiei că $a_i = i$, pentru $i = 1, \dots, n$ **2 puncte**

Pentru $k = 1$, avem $\frac{a_1^2}{a_1} = 1$, de unde $a_1 = 1$ **1 punct**

Dacă $n > 1$, fie $k \in \{1, \dots, n-1\}$. Presupunem că $a_i = i$, pentru $i \in \{1, \dots, k\}$ şi demonstrăm că $a_{k+1} = k+1$ **1 punct**

Din relaţia $a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_k^2 + a_{k+1}^2 = \frac{2k+3}{3}(a_1 + a_2 + \dots + a_k + a_{k+1})$ obţinem
 $\frac{k(k+1)(2k+1)}{6} + a_{k+1}^2 = \frac{2k+3}{3} \left(\frac{k(k+1)}{2} + a_{k+1} \right)$ **1 punct**

Rezultă $a_{k+1}^2 - \frac{2k+3}{3}a_{k+1} - \frac{k(k+1)}{3} = 0$, de unde $a_{k+1} = k+1$ sau $a_{k+1} = -k/3$.

Cum $a_{k+1} > 0$, deducem $a_{k+1} = k+1$ **1 punct**

Am demonstrat prin inducţie că $a_i = i$, pentru $i \in \{1, \dots, n\}$.

Atunci $a_1^3 + a_2^3 + \dots + a_n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4} = (a_1 + a_2 + \dots + a_n)^2$ **1 punct**

2. Arătaţi că:

(a) $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \geq \frac{4}{x+y}$, pentru oricare $x, y > 0$;

(b) $\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} \geq \frac{2(a+b)}{a+b+2c}$, pentru oricare $a, b, c > 0$.

Ovidiu Pop

Soluţie.

- (a) Inegalitatea este echivalentă cu $\frac{x+y}{2} \geq \frac{2}{\frac{1}{x} + \frac{1}{y}}$, pentru oricare $x, y > 0$, cunos-

cută ca inegalitatea dintre media aritmetică şi media armonică. **3 puncte**

Observaţie. Se acordă **3 puncte** pentru demonstrarea directă a inegalităţii, fără referire la inegalitatea mediilor.

(b) **Metoda 1.**

Notăm $x = a + c$, $y = b + c$ și $z = a + b + c$. Avem $x, y, z > 0 \dots$ **2 puncte**

Inegalitatea (b) devine $\frac{z-y}{y} + \frac{z-x}{x} \geq \frac{4z-2(x+y)}{x+y}$,

ecivalentă cu $z \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} - \frac{4}{x+y} \right) \geq 0$, satisfăcută conform inegalității (a).

..... **2 puncte**

Metoda 2.

Inegalitatea (b) este echivalentă cu

$$\left(\frac{a}{b+c} - \frac{a+b}{a+b+2c} \right) + \left(\frac{b}{c+a} - \frac{a+b}{a+b+2c} \right) \geq 0$$

..... **1 punct**

Efectuând calculele, obținem inegalitățile echivalente

$$\frac{(a-b)(a+b+c)}{(b+c)(a+b+2c)} + \frac{(b-a)(a+b+c)}{(a+c)(a+b+2c)} \geq 0$$

și

$$\frac{(a-b)^2(a+b+c)}{(b+c)(c+a)(a+b+2c)} \geq 0$$

. Astfel, inegalitatea (b) este demonstrată **3 puncte**

3. Fie $ABCD$ un paralelogram și punctele $M \in (AB)$, $N \in (BC)$, $P \in (CD)$ astfel încât $\overrightarrow{AM} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BN} = \frac{5}{6}\overrightarrow{BC}$ și $\overrightarrow{DP} = \frac{1}{6}\overrightarrow{DC}$. Arătați că centrul de greutate al triunghiului MNP se află pe dreapta AC .

Gazeta Matematică

Soluție. Fie $AC \cap BD = \{O\}$. Avem

$$\overrightarrow{OM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{OA} + \frac{2}{3}\overrightarrow{OB},$$

$$\overrightarrow{ON} = \frac{1}{6}\overrightarrow{OB} + \frac{5}{6}\overrightarrow{OC},$$

$$\overrightarrow{OP} = \frac{5}{6}\overrightarrow{OD} + \frac{1}{6}\overrightarrow{OC}.$$

..... **3 puncte**

Notăm cu G este centrul de greutate al triunghiului MNP . Atunci

$$\overrightarrow{OG} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{ON} + \overrightarrow{OP})$$

..... **2 puncte**

Obținem $\overrightarrow{OG} = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{3}\overrightarrow{OA} + \frac{2}{3}\overrightarrow{OB} + \frac{1}{6}\overrightarrow{OB} + \frac{5}{6}\overrightarrow{OC} + \frac{5}{6}\overrightarrow{OD} + \frac{1}{6}\overrightarrow{OC} \right) = \frac{1}{3} \left(-\frac{1}{3}\overrightarrow{OA} + \right.$
 $\left. + \frac{2}{3}\overrightarrow{OB} + \frac{1}{6}\overrightarrow{OB} + \frac{5}{6}\overrightarrow{OC} - \frac{5}{6}\overrightarrow{OB} + \frac{1}{6}\overrightarrow{OC} \right) = \frac{2}{9}\overrightarrow{OC}$, deci $G \in OC$ **2 puncte**

4. (a) Demonstrați identitatea: $[x] + [x + \frac{1}{2}] = [2x]$, pentru oricare $x \in \mathbb{R}$.
 (b) Rezolvați ecuația: $[x + \frac{1}{2}] + [2x + \frac{1}{2}] + [4x + \frac{1}{2}] + [8x + \frac{1}{2}] + \dots + [2^{100}x + \frac{1}{2}] = 0$.
 ($[a]$ reprezintă partea întreagă a numărului real a)

Florin Cârstea

Soluție.

- (a) Fie $x \in \mathbb{R}$. Notăm $[x] = k \in \mathbb{Z}$. Avem $x \in [k, k+1)$.
Cazul 1. $x \in [k, k + \frac{1}{2})$. Atunci $x + \frac{1}{2} \in [k + \frac{1}{2}, k+1)$ și $2x \in [2k, 2k+1)$.
 Rezultă $[x] + [x + \frac{1}{2}] = k + k = 2k = [2x]$.
Cazul 2. $x \in [k + \frac{1}{2}, k+1)$. Deci $x + \frac{1}{2} \in [k+1, k + \frac{3}{2})$ și $2x \in [2k+1, 2k+2)$.
 Rezultă $[x] + [x + \frac{1}{2}] = k + (k+1) = 2k+1 = [2x]$ **2 puncte**
- (b) Aplicând identitatea (a), deducem că ecuația este echivalentă cu:
 $([2x] - [x]) + ([4x] - [2x]) + \dots + ([2^{101}x] - [2^{100}x]) = 0$.
 După reducerea termenilor, ecuația devine $[2^{101}x] = [x]$ **2 puncte**
 Atunci $|2^{101}x - x| < 1$, de unde deducem $x \in (-1, 1)$ **1 punct**
- i. $x \in (-1, 0)$.
 Avem: $[2^{101}x] = [x] \Leftrightarrow [2^{101}x] = -1 \Leftrightarrow -1 \leq 2^{101}x < 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{2^{101}} \leq x < 0$.
 Obținem mulțimea de soluții: $\mathcal{S}_1 = \left[-\frac{1}{2^{101}}, 0\right)$.
- ii. $x \in [0, 1)$.
 Avem: $[2^{101}x] = [x] \Leftrightarrow [2^{101}x] = 0 \Leftrightarrow 0 \leq 2^{101}x < 1 \Leftrightarrow 0 \leq x < \frac{1}{2^{101}}$.
 Obținem mulțimea de soluții: $\mathcal{S}_2 = \left[0, \frac{1}{2^{101}}\right)$.
- Mulțimea soluțiilor ecuației date: $\mathcal{S} = \mathcal{S}_1 \cup \mathcal{S}_2 = \left[-\frac{1}{2^{101}}, \frac{1}{2^{101}}\right)$ **2 puncte**