

BAREM DE CORECTARE

Subiectul I

Demonstrați că șirul $(I_n)_{n \geq 1}$ definit prin $I_n = \frac{1}{n} \int_{\frac{1}{n}}^1 \ln(1 + \cos x) dx$, pentru oricare $n \geq 1$, este convergent și determinați limita sa.

Are loc inegalitatea $0 < \ln(1+x) < x$, pentru oricare $x > 0$ 1p

Pentru $x \in \left[\frac{1}{n}, 1\right]$ avem $\cos x > 0$ deci $0 < \ln(1 + \cos x) < \cos x$ (1).....1p

Funcțiile din inegalitățile (1) sunt continue deci integrabile pe $\left[\frac{1}{n}, 1\right]$ și integrând obținem

$$0 < \int_{\frac{1}{n}}^1 \ln(1 + \cos x) dx < \int_{\frac{1}{n}}^1 \cos x dx = \sin 1 - \sin \frac{1}{n}$$

.....1p

$$0 < I_n < \frac{1}{n} (\sin 1 - \sin \frac{1}{n})$$

.....1p

Șirul $a_n = \sin 1 - \sin \frac{1}{n}$ este mărginit, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$ deci $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} (\sin 1 - \sin \frac{1}{n}) = 0$ 2p

Din criteriul cleștelui obținem $\lim_{n \rightarrow \infty} I_n = 0$ 1p

Subiectul II

Să se calculeze $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{a^2 \cos^2 x + b^2 \sin^2 x}$, unde $a, b \in (0, \infty)$.

Se face substituția $\tan x = t$, atunci $\sin^2 x = \frac{\tan^2 x}{1 + \tan^2 x}$ și $\cos^2 x = \frac{1}{1 + \tan^2 x}$

.....3p

Clacularea limitelor de integrare1p

Integral devine $\int_0^1 \frac{dt}{a^2 + b^2 t^2} = \frac{1}{ab} \arctg \frac{b}{a}$

.....3p

Subiectul III

Fie $(G, \cdot)$ un grup cu elementul neutru e .

1) Dacă $x^2 = e$, $\forall x \in G$, arătați că grupul este comutativ.

2) Dacă G este finit, comutativ și $x^2 = e$ pentru mai mult de jumătate din elementele lui G , arătați că $x^2 = e$, $\forall x \in G$.

- a) $(xy)^2 = e = ee = x^2 y^2 = xxyy \rightarrow xy = yx$ 2p
- b) Arata ca $H = \{x \in G \mid x^2 = e\}$ este subgrup in G 2p
 Ordinul lui H divide ordinul lui G (teorema lui Lagrange)2p
 $\text{Ord}(H) > \text{ord}(G)/2$, deci $\text{ord}(H) = \text{ord}(G)$, prin urmare $H = G$.
1p

Subiectul IV

Fie $(G, \star)$ un grup și $H \subset G$ un subgrup propriu al său. Determinați funcția $f: G \rightarrow G$ astfel încât $f(e) = a \in G$, unde e este elementul neutru al lui G și $f(x \star y) = x \star f(y), \forall x, y \in G \setminus H$.

Fie $x \in G \setminus H$. Atunci $x' \in G \setminus H$ unde x' este simetricul lui x din grupul G 1p
 $a = f(e) = f(x' \star x) = x' \star f(x)$ de unde rezultă $f(x) = x \star a, \forall x \in G \setminus H \cup \{e\}$ 2p
 Dacă $y \in H$ și $x \notin H$ atunci $x \star y \in G \setminus H$ și $f(x \star y) = x \star y \star a$ 1p
 $x', x \star y \in G \setminus H$ și $f(y) = f(x' \star (x \star y)) = x' \star f(x \star y) = x' \star (x \star y \star a) = y \star a, \forall y \in H$ 2p
 Prin urmare $f(x) = x \star a, \forall x \in G$ care verifică condițiile din enunț.....1p