

Barem – Clasa a VII-a

Subiectul I

Aflați $x \in \mathbb{N}$ astfel încât $\sqrt{\frac{4x-5}{x+1}}$ este număr natural.

Gazeta Matematică

Rezolvare:

Deducem că $\frac{4x-5}{x+1} \in \mathbb{N} \Rightarrow x+1 \mid 4x-5$. Dar $x+1 \mid 4(x+1) = 4x+4$. Atunci: $x+1 \mid (4x+4) - (4x-5) = 9$. De aici: $x+1 \in \{\pm 9; \pm 3; \pm 1\}$.

.....(5p)

Analizând toate cazurile, se obține unica soluție $x=2$

.....(2p)

Subiectul II

Fie paralelogramul $ABCD$ și P un punct în interiorul său. Ducem prin P paralela la AB , care intersectează AD în P_1 și BC în P_2 . De asemenea, ducem prin P paralela la AD , care intersectează AB în P_3 și CD în P_4 .

a) Arătați că $A_{ABD} = A_{CBD}$.

a) Demonstrați că dacă $A_{PP_1AP_3} = A_{PP_2CP_4}$ atunci $P \in (BD)$.

b) Arătați că dacă $P \in (BD)$ atunci $A_{PAB} = A_{PBC}$.

Rezolvare:

a) Din faptul că $ABCD$ este paralelogram deducem că:

$$\begin{cases} AB=CD \text{ (laturi opuse)} \\ AD=BC \text{ (laturi opuse)} \\ BD=BD \end{cases} \xrightarrow{(L.L.L)} \Delta ABD \equiv \Delta CBD \Rightarrow A_{ABD} = A_{CBD} = \frac{A_{ABCD}}{2} \dots\dots\dots$$

.....(2p)

b) Dacă $P \notin (BD)$, atunci $P \in \int (\Delta ABD)$ sau $P \in \int (\Delta CBD)$. Fără a restrânge generalitatea presupunem că $P \in \int (\Delta ABD)$.

Se vede ușor că patrulaterele PP_1DP_4 și PP_2BP_3 sunt paralelograme, deci, conform cu a) vom avea că:

$$A_{PP_1D} = A_{PP_4D} \text{ și } A_{PP_2B} = A_{PP_3B}. \text{ Deci: } A_{ABD} > A_{PP_1D} + A_{PP_3B} + A_{PP_1AP_3} = A_{PP_4D} + A_{PP_2B} + A_{PP_2CP_4} > A_{CBD},$$

contradicție cu presupunerea făcută. Deci $P \in (BD)$

.....(3p)

c) Aplicând formula ariei pentru triunghi, găsim că:
$$\left(\begin{array}{l} \frac{A_{PAB}}{A_{ABD}} = \frac{PB}{BD} \\ \frac{A_{PBC}}{A_{CBD}} = \frac{PB}{BD} \end{array} \right) \Rightarrow A_{PAB} = A_{PBC} \dots \dots \dots (2p)$$

Subiectul III

a) Arătați că $\frac{n}{n+1} < \frac{n+1}{n+2}$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

b) Deduceți că:

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot \dots \cdot \frac{2n-1}{2n} < \frac{1}{\sqrt{2n+1}} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Rezolvare:

a) $\frac{n}{n+1} < \frac{n+1}{n+2} \Leftrightarrow (n+1)^2 > n \cdot (n+2) \Leftrightarrow n^2 + 2n + 1 > n^2 + 2n \Leftrightarrow 1 > 0$, adevărat, $\forall n \in \mathbb{N} \dots \dots \dots (3p)$

b) Fie

$$P = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot \dots \cdot \frac{2n-1}{2n}. \text{ Din a) vom avea: } P^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \dots \cdot \frac{2n-1}{2n} \cdot \frac{2n-1}{2n} < \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{5}{6} \cdot \dots \cdot \frac{2n-2}{2n-1} \cdot \frac{2n-1}{2n} < \frac{1}{2n} < \frac{1}{\sqrt{2n+1}} \dots \dots \dots (4p)$$

Am folosit că: $\frac{1}{2} < \frac{2}{3}; \frac{3}{4} < \frac{4}{5}; \frac{5}{6} < \frac{6}{7}; \dots; \frac{2n-1}{2n} < \frac{2n}{2n+1}$.

Subiectul IV

Se consideră un trapez $ABCD$ cu $AB \parallel CD$, $AD \perp DC$, $AB = AD = a > 0$ și $CD = 2a$.

a) Demonstrați că $BD \perp BC$.

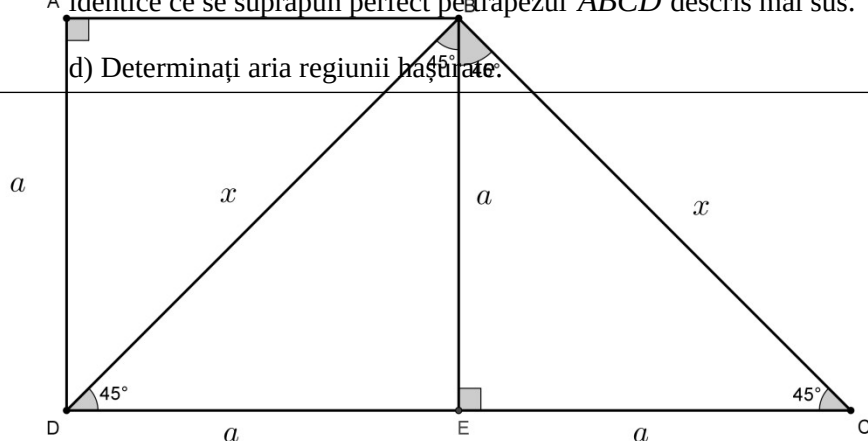
b) Aflați BC și găsiți A_{ABCD} .

c) Argumentați că $A_1 A_2 A_3 A_4$ este pătrat știind că în figură este reprezentat un model format din plăci de marmură identice ce se suprapun perfect pe trapezul $ABCD$ descris mai sus.

d) Determinați aria regiunii hașurate.

Rezolvare:

a) Fie E proiecția pe DC a lui B .
Atunci: $ABED$ este pătrat, de unde:
 $DE = AB = a$ și $m(\angle EBD) = 45^\circ$. De
aici: $EC = DC - DE = 2a - a = a$. Astfel



ΔBEC este dreptunghic isoscel cu vârful în E . Aceasta înseamnă că $m(\sphericalangle EBC) = 45^\circ$. Deci

$$m(\sphericalangle DBC) = m(\sphericalangle EBD) + m(\sphericalangle EBC) = 90^\circ, \dots\dots(2p)$$

$$b) \text{ Avem c\^a } \Delta EBC \equiv \Delta EBD \Rightarrow BC = BD = x \text{ \^si : } \begin{cases} A_{BCD} = \frac{BD \cdot BC}{2} = \frac{x^2}{2} \Rightarrow x^2 = 2a^2 \Rightarrow x = a\sqrt{2}. \dots\dots\dots(1,5 p) \\ A_{BCD} = \frac{BE \cdot DC}{2} = a^2 \end{cases}$$

$$A_{ABCD} = \frac{AD \cdot (AB + CD)}{2} = \frac{a \cdot (a + 2a)}{2} = \frac{3a^2}{2} \dots\dots\dots(0,5p)$$

$$c) \Delta B_1C_1C_2 \text{ este dreptunghic isoscel } \Rightarrow m(\sphericalangle B_1C_1C_2) = 45^\circ = m(\sphericalangle C_2C_1D_2) \Rightarrow \begin{cases} C_1C_2 \parallel D_1D_2 \Rightarrow A_1-C_1-C_2 \\ A_1C_1 \parallel D_1D_2 \end{cases}$$

coliniare. Cum $\begin{cases} C_1C_2 \perp C_2D_3 \Rightarrow C_1-C_2-A_2 \text{ coliniare. Deci } A_1-C_1-C_2-A_2 \text{ coliniare. Analog} \\ A_2C_2 \perp C_2D_3 \end{cases}$

$A_2-C_3-C_4-A_3$; $A_3-C_5-C_6-A_4$; și $A_4-C_7-C_8-A_1$ coliniare.

$$A_1A_2 = A_1C_1 + C_1C_2 + C_2A_2 = a + a\sqrt{2} + a = a \cdot (2 + \sqrt{2}) = A_2A_3 = A_3A_4 = A_4A_1.$$

$$m(\sphericalangle A_1) = m(\sphericalangle A_2) = m(\sphericalangle A_3) = m(\sphericalangle A_4) = 90^\circ. \text{ Deci } A_1A_2A_3A_4 \text{ este p\^atrat.} \dots\dots\dots(2p)$$

d)

$$A_{\text{hașurată}} = A_{A_1A_2A_3A_4} - A_{\text{trapezelor}} + 4 \cdot A_{B_1C_1C_2} = a^2 \cdot (2 + \sqrt{2})^2 - \frac{3a^2}{2} \cdot 8 + \frac{a^2}{2} \cdot 4 = 6a^2 + 4\sqrt{2}a^2 - 12a^2 + 2a^2 = 4a^2(\sqrt{2} - 1) \dots\dots\dots(1p)$$