

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

ETAPA LOCALĂ , 17 FEBRUARIE 2018

CLASA a V -a

BAREME SI SOLUTII CLASA aV-a

1. Se dau numerele :

$$x = [3^{61} \cdot 9^{30} + (5^6)^7 : (5^5)^8] : 2^2 \cdot 3 - 3 \text{ și } y = 100 : \{23 + 34 : [(2 \cdot 3^2)^2 : 18 - 34^0 \cdot 1^{2018}]\} \cdot 3.$$

a) Comparați numerele 3^x și 5^y .

b) Arătați că $x^{2018} + y^{2018}$ nu este pătrat perfect.

Soluție și barem:

- a) $x = 18$ 1,5p
 $y = 12$ 1,5p
 $3^x = 27^6$, $5^y = 25^6$, concluzia $3^x > 5^y$ 1p
b) $U(18^{2018}) = U(18^2) = 4$ 1p
 $U(12^{2018}) = U(12^2) = 4$ 1p
 $U(18^{2018} + 12^{2018}) = 8$ și concluzia 1p

2. Două caiete, un pix și trei ciocolate costă 89 lei, iar patru caiete, șapte pixuri și o ciocolată costă 153 lei.

a) Cât costă la un loc un caiet, un pix și o ciocolată?

b) Cât costă fiecare dintre articole, știind că un pix costă mai mult cu 8 lei decât un caiet, iar o ciocolată costă cu 2 lei mai puțin decât caietul și pixul la un loc?

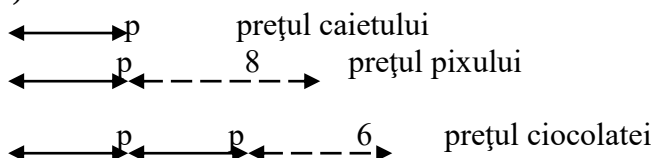
Bareme și soluții:

2. a) 2 caiete 1 pix 3 ciocolate 89 lei
 4 caiete 7 pixuri 1 ciocolată 153 lei
 6 caiete 3 pixuri 9 ciocolate 267 lei

Deci 10 caiete 10 pixuri 10 ciocolate 420 lei

⇒ 1 caiet 1 pix 1 ciocolată 42 lei (3p)

b)



$$4p + 8 + 6 = 42. \Rightarrow p = 7 \text{ lei} \quad (3p)$$

Prețurile sunt 7, 15, 20 lei (1p)

3. Arătați că numerele $S_n = 2^n + 3^n + 7^n + 8^n$ se divid cu 10 oricare ar fi n număr natural impar.

Autor prof. Valeriu Gornoavă

Soluție

S I. Numerele n naturale impare pot fi de forma $n=4k+1$ sau $n=4k+3, k \in \mathbb{N}$. 3p
 Dacă $n=4k+1, k \in \mathbb{N}$ atunci $u(S_n) = u(2^1 + 3^1 + 7^1 + 8^1) = u(20) = 0$. 1,5p
 Dacă $n=4k+3, k \in \mathbb{N}$ atunci $u(S_n) = u(2^3 + 3^3 + 7^3 + 8^3) = u(890) = 0$. 1,5p
 Atunci $u(S_n) = 0$, oricare ar fi n număr natural impar, rezultă că S_n se divide cu 10, pentru orice n natural impar. 1p

Total 7p

S II. Dacă n număr natural impar atunci 2p
 $2^n = (10-8)^n = 10k - 8^n, k \in \mathbb{N}$ și 2p
 $3^n = (10-7)^n = 10p - 7^n, p \in \mathbb{N}$; 2p
 Atunci $S_n = 10k - 8^n + 10p - 7^n + 7^n + 8^n, k, p \in \mathbb{N}$, rezultă că 1p
 $S_n = 10(k+p), k, p \in \mathbb{N} \Leftrightarrow S_n = 10t, t \in \mathbb{N} \Leftrightarrow S_n$ se divide cu 10, $(\forall) n$ număr natural impar. 1p

Total 7p

4. Determinați numerele naturale $\overline{abcd}$, știind că $2 \cdot \overline{abcd} = (\overline{acd} - 2) \cdot 19$.

Barem de notare

Folosind scrierea zecimală avem $2000a + 200b + 20c + 2d = 1900a + 190c + 19d - 38$ sau $100a + 200b - 170c = 17d - 38$. 2p
 Cum membrul stâng are ultima cifră 0 rezultă că și membrul drept trebuie să aibă ultima cifră 0. De aici deducem că $d = 4$. 2p
 Cu aceasta, ultima relație devine $100a + 200b = 170c + 30$ sau $10a + 20b = 17c + 3$. Și aici membrul stâng are ultima cifră 0, de unde deducem că $c = 1$. 1p
 Înlocuind pe c obținem $a + 2b = 2$, de unde $a = 2$ și $b = 0$. Numărul căutat este 2014. 2p