SIBIU
2014

Olimpiada Naţională de Matematică
Etapa Naţională, Sibiu, 8 aprilie 2014

SOLUŢII ŞI BAREME ORIENTATIVE, CLASA a XII-a

Problema 1. Fie $(A,+,\cdot)$ un inel. Pentru $a \in A$ definim funcţiile $s_a : A \to A$ şi $d_a : A \to A$ prin $s_a(x) = ax$, $d_a(x) = xa$, oricare ar fi $x \in A$.

a) Presupunem că A este mulţime finită. Să se arate că: pentru orice $a \in A$, s_a este injectivă dacă şi numai dacă d_a este injectivă.

b) Daţi exemplu de inel care conţine un element a pentru care exact una dintre funcţiile s_a şi d_a este injectivă.

Soluţie. a) Să presupunem că s_a este injectivă. Deoarece A este finită s_a este bijectivă, deci există $b \in A$ astfel încât $ab = 1$ **3p**

Astfel, dacă $d_a(x) = d_a(y)$, atunci $(x-y)a = 0$, de unde $(x-y)ab = 0$, adică $x - y = 0$, ceea ce demonstrează injectivitatea funcţiei d_a **2p**

Implicaţia inversă se demonstrează asemănător.

b) Pentru un exemplu putem considera mulţimea $S = \{(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \mid x_n \in \mathbb{R}\}$ şi inelul funcţiilor aditive $f : S \to S$, cu operaţiile de adunare şi compunere a funcţiilor. Ca element a se poate lua funcţia dată prin $a\left((x_n)_n\right) = (x_{n+1})_n$. Deoarece a este surjectivă, d_a este injectivă; pe de altă parte, s_a nu este injectivă **2p**

Problema 2. Fie I, J două intervale, fie $\varphi : J \to \mathbb{R}$ o funcţie continuă care nu se anulează în niciun punct din J şi fie $f, g : I \to J$ două funcţii derivabile astfel încât $f' = \varphi \circ f$ şi $g' = \varphi \circ g$.

Să se arate că, dacă există $x_0 \in I$ astfel încât $f(x_0) = g(x_0)$, atunci funcţiile f şi g coincid.

Soluţie. Deoarece φ nu se anulează şi este continuă, funcţia $\dfrac{1}{\varphi}$ este corect definită şi are o primitivă $F : J \to \mathbb{R}$ **1p**

Ipoteza devine $(F \circ f)'(x) = 1$, $\forall x \in I$, deci există $a \in \mathbb{R}$ astfel încât $F(f(x)) = x + a$, $\forall x \in I$, analog există $b \in \mathbb{R}$ astfel încât $F(g(x)) = x + b$, $\forall x \in I$ **2p**

Deducem $x_0 + a = F(f(x_0)) = F(g(x_0)) = x_0 + b$, deci $a = b$. Rezultă $F(f(x)) = F(g(x))$, $\forall x \in J$ (*) **2p**

Pe de altă parte, din $F'(x) \neq 0$, $\forall x \in J$ rezultă că F' are semn constant pe J, deci este strict monotonă. Astfel F este injectivă, iar din (*) reiese $f = g$ **2p**

Problema 3. Fie $f : [1,+\infty) \to (0,+\infty)$ o funcţie continuă, având proprietăţile:

(i) funcţia $g : [1,+\infty) \to (0,+\infty)$ dată de $g(x) = \dfrac{f(x)}{x}$ are limită la $+\infty$;

(ii) funcţia $h : [1,+\infty) \to (0,+\infty)$ dată de $h(x) = \dfrac{1}{x}\displaystyle\int_1^x f(t)\,\mathrm{d}t$ are limită finită la $+\infty$.

a) Să se arate că $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = 0$.

b) Să se arate că $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x^2}\displaystyle\int_1^x f^2(t)\,\mathrm{d}t = 0$.

Soluţie. a) Fie $\ell = \lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$. Dacă $\ell \in (0,+\infty)$, atunci există $a>0$ astfel încât $g(x) > \ell/2$ pentru $x \geq a$, de unde

$$h(x) = \frac{1}{x}\Big(\int_1^a f(t)\,\mathrm{d}t + \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t\Big) \geq \frac{1}{x}\int_1^a f(t)\,\mathrm{d}t + \frac{\ell}{2x}\int_a^x t\,\mathrm{d}t = \frac{1}{x}\int_1^a f(t)\,\mathrm{d}t + \frac{\ell(x^2-a^2)}{4x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty,$$

ceea ce contrazice (ii). La fel arătăm că presupunerea $\ell = +\infty$ contrazice (ii), deci $\ell = 0$ ... **2p**

b) Observăm că $\int_1^x f(t)\,\mathrm{d}t > 0$, $\forall x > 1$, deci

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x^2}\int_1^x f^2(t)\,\mathrm{d}t = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\int_1^x f^2(t)\,\mathrm{d}t}{x\int_1^x f(t)\,\mathrm{d}t}\cdot\frac{\int_1^x f(t)\,\mathrm{d}t}{x}\right) = \lambda \lim_{x\to+\infty}\frac{\int_1^x f^2(t)\,\mathrm{d}t}{x\int_1^x f(t)\,\mathrm{d}t} = \lambda\lim_{x\to+\infty}\frac{u(x)}{v(x)},$$

unde $\lambda = \lim\limits_{x\to+\infty} h(x)$, $u(x) = \int_1^x f^2(t)\,\mathrm{d}t$, $v(x) = x\int_1^x f(t)\,\mathrm{d}t$ ... **1p**

Pentru $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{u(x)}{v(x)}$ folosim regula lui l'Hospital pentru $\frac{\infty}{\infty}$: u şi v definesc funcţii derivabile, $\lim\limits_{x\to+\infty} v(x) = +\infty$ $\big($avem $v(x) \geq m(x-1)$ pentru $x \geq 2$, unde $m = \inf_{x\in[1,2]} f(x)\big)$ ... **1p**

$v'(x) = \int_1^x f(t)\,\mathrm{d}t + xf(x) \neq 0$, $\forall x \geq 1$ ... **1p**

iar $\dfrac{u'(x)}{v'(x)} = \dfrac{f^2(x)}{xf(x)+\int_1^x f(t)\,\mathrm{d}t} = g(x)\cdot\dfrac{f(x)}{f(x)+h(x)} \in \big(0, g(x)\big)$ şi $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = 0$ implică $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{u'(x)}{v'(x)} = 0$, deci $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{u(x)}{v(x)} = 0$, de unde concluzia ... **2p**

Problema 4. Fie $(G,\cdot)$ un grup finit cu elementul neutru notat e. Presupunem că există $a \in G\backslash\{e\}$ şi un număr prim p cu proprietatea $x^{p+1} = a^{-1}xa$, oricare ar fi $x \in G$.

a) Să se arate că există $k \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $\mathrm{ord}(G) = p^k$.

b) Să se arate că mulţimea $\{x \in G \mid x^p = e\}$ este un subgrup H al lui G şi $(\mathrm{ord}(H))^2 > \mathrm{ord}(G)$.

Soluţie. a) Dacă $x, y \in G$, atunci $(xy)^{p+1} = a^{-1}xya = a^{-1}xaa^{-1}ya = x^{p+1}y^{p+1}$. Relaţia obţinută se poate scrie $x(yx)^py = x^{p+1}y^{p+1}$, deci $(yx)^p = x^py^p$ ... **1p**

Pentru $x = a$ obţinem din ipoteză $a^p = e$ deci, folosind relaţia precedentă, $(ya)^p = y^p$. Prin înmulţire cu ya la stânga reiese $yay^p = (ya)^{p+1} = y^{p+1}a$, deci $ay^p = y^pa$, $\forall y \in G$ ... **1p**

Din ipoteză rezultă $y^{p(p+1)} = a^{-1}y^pa = y^p$, deci $y^{p^2} = e$, $\forall y \in G$. Deoarece p este prim reiese că orice element al grupului are ordinul 1, p sau p^2 şi, folosind teorema lui Cauchy, deducem că $\mathrm{ord}(G) = p^k$, $k \in \mathbb{N}^*$ ... **1p**

b) Dacă $x, y \in H$, atunci $(xy)^p = y^px^p = e$, deci $xy \in H$. Astfel H este parte stabilă şi, cum H este finit, rezultă că H este subgrup ... **1p**

Considerăm funcţia $f : G \to G$, $f(x) = x^p$. Cum $e = x^{p^2} = (x^p)^p$, deducem că imaginea funcţiei este inclusă în H. În plus, $x, y \in G$ şi $f(x) = f(y)$ implică $x^p(y^{-1})^p = e$, deci $(y^{-1}x)^p = e$, adică $y^{-1}x \in H$, de unde $x \in Hy$. Reiese astfel că, pentru orice element din $\mathrm{Im}f$, numărul preimaginilor sale din G este chiar $\mathrm{ord}(H)$, deci $|\mathrm{Im}f| = \frac{\mathrm{ord}(G)}{\mathrm{ord}(H)}$ ... **1p**

Din $a \neq e$ reiese $a \notin \mathrm{Im}f$: în caz contrar $a = b^p$ pentru un $b \in G$, de unde ar rezulta $b^{p+1} = b^{-p}bb^p$, deci $e = b^p = a$ – fals. Cum $a \in H$, rezultă că $\mathrm{ord}(H) > |\mathrm{Im}f| = \frac{\mathrm{ord}(G)}{\mathrm{ord}(H)}$, ceea ce duce imediat la concluzie ... **2p**