

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

– ETAPA LOCALĂ, 24.02.2019 –

CLASA A XI-A

Subiecte

1. Calculați: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + (1^2 + 2^2) + (1^2 + 2^2 + 3^2) + \dots + (1^2 + 2^2 + \dots + n^2)}{1^3 + 3^3 + \dots + (2n-1)^3}$

2. Determinați matricele $A, B \in M_2(\mathbb{Q})$ care verifică relațiile :

$$A^2 + 2B^2 = \begin{pmatrix} 4 & -4 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \text{ și } AB + BA = \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Prof. Gabriel Necula, Breaza

3. Fie matricele $A, B \in M_2(\mathbb{Z})$ cu proprietățile $AB = BA$ și $\det A = \det B = \frac{1}{4} \det(A^2 + B^2) = 1$. Arătați că 4 divide numerele $\det(A^{2019} + B^{2019})$ și $\det(A^{2019} - B^{2019})$.

Prof. Octavian Purcaru, Ploiești

4. Fie șirul $(x_n)_{n \geq 1}$ cu $x_1 = x_2 = 1$, $x_{n+1} = x_1 + \frac{x_1 x_2}{2!} + \dots + \frac{x_1 \dots x_n}{n!}$, oricare ar fi $n \geq 2$.

a) Arătați că $x_1 \dots x_n \leq \frac{n!}{2^{n-1}}$;

b) Arătați că șirul $(x_n)_{n \geq 1}$ are limita a și $a < 2$;

c) Calculați $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{x_{n+1}}{x_n} \right)^{\frac{n!}{2^n}}$

Prof. Emil Vasile, Ploiești

Notă:

Timp de lucru : 3 ore. Fiecare subiect se notează cu puncte de la 0 la 7.