



OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

Etapa locală, 8 februarie 2020

Clasa a V-a

1. Împărțind numărul natural m la numărul natural n obținem câtul 7 și restul 35. Să se afle m , știind că $m - n < 255$.
2. Determinați numărul natural $\overline{abbc}$ știind că $a + 2b = c$ și b este dublul lui a .
3. a) Calculați $3^2 + 2^4$;
b) Determinați două numere naturale a și b pentru care $a^2 + b^4 = 5^{4042}$
4. Dacă se împarte un număr natural de două cifre la cifra unităților lui, se obține ca rest cifra zecilor. Aflați câte astfel de numere există.

Timp de lucru 2 ore.

Fiecare problemă este notată cu 7 puncte.

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ
Etapa locală, 8 februarie 2020
Clasa a VI-a

1. Determinați mulțimile A și B care îndeplinesc simultan condițiile:
 - i) $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$;
 - ii) $A \cap B = \{2, 3\}$;
 - iii) mulțimea B are cel puțin patru elemente;
 - iv) suma elementelor mulțimii A este un număr prim.
2. Să se arate că nu există numerele naturale a, b, c astfel încât
$$7a^2 + 7b^2 + 3c^2 - 5a - 3b - c + 1 = 2020$$
.
3. Fie două unghiuri $\angle AOB$ și $\angle AOC$ complementare și neadiacente. Știind că măsura unghiului format de bisectoarele lor este 30° , calculați măsurile celor două unghiuri.
4. Trei unghiuri formate în jurul punctului O au măsurile x, y, z (exprimate în grade). Dacă x și y sunt direct proporționale cu 2 și 3, iar y și z sunt invers proporționale cu 0,1(6) și 0,2, determinați măsurile celor trei unghiuri.

Timp de lucru 2 ore.

Fiecare problemă este notată cu 7 puncte.

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ
Etapa locală, 8 februarie 2020
Clasa a VII-a

1. Arătați că:

a) $3240 < \sqrt{1^2+1} + \sqrt{2^2+1} + \sqrt{3^2+1} + \dots + \sqrt{80^2+1} < 3320$;

b) $k^2 + k + 1 \leq 2 \cdot (\sqrt{0^2+1} + \sqrt{1^2+1} + \dots + \sqrt{k^2+1}) \leq k^2 + 3k + 2, k \in \mathbb{Z}$.

2. Dacă x, y, z sunt numere reale pozitive cu proprietatea că pătratele lor sunt proporționale cu numerele 18, 20 și 36, iar $x^4 + y^4 + z^4 = 2020$, să se arate că $x + y + z < 15$.

3. Fie $ABCD$ un trapez neisoscel, având baza mică (AB), iar I punctul de intersecție al bisectoarelor unghiurilor $\sphericalangle ADC$ și $\sphericalangle BCD$. Dacă $DC = AD + BC$, arătați că $IA = IB$.

4. Fie $ABCD$ un pătrat, E mijlocul laturii (CD) și M un punct interior pătratului, astfel încât $m(\sphericalangle MAB) = m(\sphericalangle MBC) = m(\sphericalangle BME) = x$. Aflați x .

Timp de lucru 3 ore.

Fiecare problemă este notată cu 7 puncte.

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

Etapa locală, 8 februarie 2020

Clasa a VIII-a

1. Determinați perechile (a, b) de numere naturale nenule pentru care $a^2 - 6a = b^2 + b - 10$.
2. Să se rezolve ecuația: $x + \frac{x-2}{2} + \frac{x-4}{3} + \frac{x-6}{4} + \dots + \frac{x-2016}{1009} + \frac{x-2018}{1010} = -2020$.
3. Fie $\triangle ABC$ dreptunghic cu $m(\hat{A}) = 90^\circ$ și $E \in (AB)$, $F \in (AC)$ astfel încât $EF \parallel BC$ și $\frac{AE}{AB} = \frac{2}{3}$. Se dă $AB = \frac{15}{2}$ și $AC = 10$. Triunghiul ABC se îndoaie după dreapta EF astfel încât $(AEF) \perp (BEC)$. Aflați perimetrul $\triangle ABC$ după îndoire.
4. În triunghiul ABC , bisectoarea $[BE, E \in (AC)]$ intersectează mediana $[AD, D \in (BC)]$ în G . Pe planul triunghiului se ridică perpendiculara FG .
 - a) Arătați că $\frac{AG}{GD} \cdot \frac{CE}{AE} = 2$;
 - b) Dacă G este centrul de greutate al triunghiului ABC și $FG = GD = AE = a$, calculați distanța de la B la planul (FAC) .

Timp de lucru 3 ore.

Fiecare problemă este notată cu 7 puncte.



OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

Etapa locală, 8 februarie 2020

CLASA a V-a

BAREM

1. Împărțind numărul natural m la numărul natural n , obținem câtul 7 și restul 35. Să se afle m , știind că $m - n < 255$.

Soluție:

$$m = 7 \cdot n + 35 \quad \dots 1p$$

$$r = 35 \Rightarrow n > 35 \quad \dots 1p$$

$$7n + 35 - n < 255 \quad \dots 1p$$

$$n < 37 \quad \dots 2p$$

$$n = 36 \quad \dots 1p$$

$$m = 287 \quad \dots 1p$$

2. Determinați numărul natural $\overline{abbc}$ știind că $a + 2b = c$ și b este dublul lui a .

Soluție:

$$b = 2a \quad \dots 1p$$

Din $5a = c$ obținem că c este multiplu de 5,

dar cum $a \neq 0 \Rightarrow c \neq 0$, c cifră,

$$\text{rezultă că } c = 5 \quad \dots 3p$$

$$a = 1, b = 2 \quad \dots 2p$$

$$\overline{abbc} = 1225 \quad \dots 1p$$

3. a) Calculați $3^2 + 2^4$;

b) Determinați două numere naturale a și b pentru care $a^2 + b^4 = 5^{4042}$.

Soluție:

$$a) \quad 3^2 + 2^4 = 25. \quad \dots 2p$$

$$b) \quad a^2 + b^4 = 5^{4040} \cdot 25 \quad \dots 1p$$

$$a^2 + b^4 = 5^{4040} \cdot (3^2 + 2^4) \Rightarrow a^2 + b^4 = (5^{2020} \cdot 3)^2 + (5^{1010} \cdot 2)^4 \Rightarrow a = 5^{2020} \cdot 3 \text{ și}$$

$$b = 5^{1010} \cdot 2 \quad \dots 4p$$

4. Dacă se împarte un număr natural de două cifre la cifra unităților lui, se obține ca rest cifra zecilor. Aflați câte astfel de numere există.

Soluție:

$$\overline{ab} : b = x \text{ rest } a$$

Avem $a \neq 0$ (prima cifră), $b \neq 0$ (împărțitor) și $a < b$ (restul mai mic decât împărțitorul) $\dots 1p$

$$\overline{ab} = 10a + b \text{ și } \overline{ab} = bx + a \Rightarrow 9a = b(x-1) \Rightarrow b(x-1) \in M_9 \quad \dots 1p$$

Dacă $b=9 \Rightarrow x-1=a<9$. Cum $a \neq 0 \Rightarrow$ avem 8 posibilități $\dots 1p$

Dacă $b=6 \Rightarrow 2(x-1)=3a \Rightarrow a \in M_2$. Dar $a < 6$ și $a \neq 0 \Rightarrow a \in \{2;4\} \Rightarrow$ avem 2 posibilități $\dots 1p$

Dacă $b=3 \Rightarrow x-1=3a$. Dar $a < 3$ și $a \neq 0 \Rightarrow a \in \{1;2\} \Rightarrow$ avem 2 posibilități $\dots 1p$

Dacă $b \notin M_3 \Rightarrow x-1=9$ și $a=b$ (imposibil, $a < b$) $\dots 1p$

Deci există $8+2+2=12$ posibilități $\dots 1p$

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

Etapa locală, 8 februarie 2020

CLASA a VI-a

BAREM

1. Determinați mulțimile A și B care îndeplinesc simultan condițiile:

i) $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$;

ii) $A \cap B = \{2, 3\}$;

iii) mulțimea B are cel puțin patru elemente;

iv) suma elementelor mulțimii A este un număr prim.

Soluție:

Elementele 1, 4, 5 și 6 trebuie repartizate în $A - B$ și $B - A$.

Cum $\text{card } B \geq 4 \Rightarrow \text{card } (B - A) \geq 2 \Rightarrow \text{card } (A - B) \leq 2$...1p

Din 2) $\Rightarrow 2 \in A$ și $3 \in A$, $2+3=5$ (nr. prim) $\Rightarrow A = \{2, 3\}$ și $B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$...2p

Dacă $\text{card } (A - B) = 1$, atunci $A - B$ conține un număr par, cum $2+3+4=9$ (nu e nr. prim), iar $2+3+6=11$ (nr. prim) $\Rightarrow A = \{2, 3, 6\}$ și $B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$...2p

Dacă $\text{card } (A - B) = 2$, atunci $A - B$ conține două numere a căror sumă este un număr par, cum $2+3+4+6=15$ (nu e nr. prim), iar $2+3+1+5=11$ (nr. prim) $\Rightarrow A = \{1, 2, 3, 5\}$ și $B = \{2, 3, 4, 6\}$... 2p

2. Să se arate că nu există numerele naturale a, b, c astfel încât

$$7a^2 + 7b^2 + 3c^2 - 5a - 3b - c + 1 = 2020$$

Soluție:

$$7a^2 + 7b^2 + 3c^2 - 5a - 3b - c = a(7a - 5) + b(7b - 3) + c(3c - 1) \dots\dots\dots 2p$$

Arată că $a(7a - 5)$ este număr par $\forall a \in \mathbb{N} \dots\dots\dots 1p$

$b(7b - 3)$ este număr par $\forall b \in \mathbb{N} \dots\dots\dots 1p$

$c(3c - 1)$ este număr par $\forall c \in \mathbb{N} \dots\dots\dots 1p$

$7a^2 + 7b^2 + 3c^2 - 5a - 3b - c$ este număr întreg par $\forall a, b, c \in \mathbb{N} \dots\dots\dots 1p$

$7a^2 + 7b^2 + 3c^2 - 5a - 3b - c \neq 2019 \forall a, b, c \in \mathbb{Z} \dots\dots\dots 1p$

3. Fie două unghiuri $\angle AOB$ și $\angle AOC$ complementare și neadiacente. Știind că măsura unghiului format de bisectoarele lor este 30° , calculați măsurile celor două unghiuri.

Soluție:

Notăm $m(\angle AOB) = x$ și $m(\angle AOC) = y$

$$\angle AOB \text{ și } \angle AOC \text{ complementare} \Rightarrow m(\angle AOB) + m(\angle AOC) = 90^\circ \Rightarrow x + y = 90^\circ \dots\dots 1p$$

$$[\text{OE bisectoarea } \angle AOB \Rightarrow m(\angle AOE) = m(\angle EOB) = \frac{x}{2} \dots\dots\dots 1p]$$



OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

Etapă locală, 8 februarie 2020

CLASA a VII-a

BAREM

1. Arătați că:

a) $3240 < \sqrt{1^2+1} + \sqrt{2^2+1} + \sqrt{3^2+1} + \dots + \sqrt{80^2+1} < 3320$;

b) $k^2 + k + 1 \leq 2 \cdot (\sqrt{0^2+1} + \sqrt{1^2+1} + \dots + \sqrt{k^2+1}) \leq k^2 + 3k + 2, k \in \mathbb{Z}$.

Soluție:

a) Se notează $S = \sqrt{1^2+1} + \sqrt{2^2+1} + \sqrt{3^2+1} + \dots + \sqrt{80^2+1}$

Cum $k < \sqrt{k^2+1} < k+1$...1p

$1 < \sqrt{1^2+1} < 2$

$2 < \sqrt{2^2+1} < 3$

$\vdots$

$80 < \sqrt{80^2+1} < 81$

Se obține:

$1+2+\dots+80 < S < 2+3+\dots+81$...1p

$\frac{80 \cdot 81}{2} < S < \frac{81 \cdot 82}{2}$

$3240 < S < 3320$...1p

b) Se notează $S = \sqrt{0^2+1} + \sqrt{1^2+1} + \dots + \sqrt{k^2+1}$

$1 \leq \sqrt{0^2+1} \leq 1$

$1 < \sqrt{1^2+1} < 2$

...

$k < \sqrt{k^2+1} < k+1$...1p

$1+1+2+\dots+k \leq S \leq 1+2+\dots+(k+1)$...1p

$\frac{k(k+1)}{2} + 1 \leq S \leq \frac{(k+1)(k+2)}{2}$

$k^2+k+1 \leq 2 \cdot S \leq k^2+3k+2$...2p

2. Dacă x, y, z sunt numere reale pozitive cu proprietatea că pătratele lor sunt proporționale cu numerele 18, 20 și 36, iar $x^4 + y^4 + z^4 = 2020$, să se arate că $x + y + z < 15$.

Soluție:

Din condiția de proporționalitate $\frac{x^2}{18} = \frac{y^2}{20} = \frac{z^2}{36} \Leftrightarrow \frac{x^4}{324} = \frac{y^4}{400} = \frac{z^4}{1296} = \frac{x^4 + y^4 + z^4}{2020} = 1$

se obține

$x = 3\sqrt{2}, y = 2\sqrt{5}, z = 6$...4p

$$x + y + z < 15 \Leftrightarrow 3\sqrt{2} + 2\sqrt{5} < 9 \Leftrightarrow 12\sqrt{10} < 43 \Leftrightarrow 1440 < 1849 \quad \dots 3p$$

3. Fie $ABCD$ un trapez neisoscel, având baza mică (AB), iar I punctul de intersecție al bisectoarelor unghiurilor $\sphericalangle ADC$ și $\sphericalangle BCD$. Dacă $DC = AD + BC$, arătați că $IA = IB$.

Soluție:

Fie $Q \in (DC)$ a.î. $DQ = DA \Rightarrow \triangle ADQ$ isoscel ...2p

Dacă $\{P\} = DI \cap AQ$, atunci (DP) bisectoare, mediană și înălțime,

deci $\triangle AIQ$ isoscel, deci $AI = IQ$...3p

analog $AI = IQ$ și finalizarea ...2p

4. Fie $ABCD$ un pătrat, E mijlocul laturii (CD) și M un punct interior pătratului, astfel încât

$$m(\sphericalangle MAB) = m(\sphericalangle MBC) = m(\sphericalangle BME) = x. \text{ Aflați } x.$$

Soluție:

$$m(\sphericalangle MAB) + m(\sphericalangle MBA) = m(\sphericalangle MBC) + m(\sphericalangle MBA) = 90^\circ \Rightarrow m(\sphericalangle AMB) = 90^\circ \quad \dots 1p$$

$$\text{Fie } F \text{ mijlocul laturii } (AB) \Rightarrow MF = \frac{AB}{2} = AF = FB \Rightarrow \sphericalangle FMB \equiv \sphericalangle FBM \quad \dots 2p$$

$$\text{Dar } m(\sphericalangle EMF) = m(\sphericalangle FMB) + m(\sphericalangle BME) = m(\sphericalangle MBA) + m(\sphericalangle MBC) = 90^\circ \quad \dots 1p$$

$$\text{În } \triangle MEF \text{ dr. avem } MF = \frac{AB}{2} = \frac{EF}{2} \Rightarrow m(\sphericalangle MEF) = 30^\circ \quad \dots 1p$$

$$\Rightarrow m(\sphericalangle MFE) = 60^\circ \Rightarrow m(\sphericalangle MFA) = 30^\circ \quad \dots 1p$$

$$\text{În } \triangle MAF \text{ avem } x + x + 30^\circ = 180^\circ, \text{ de unde } x = 75^\circ \quad \dots 1p$$

Barem – clasa a VII-a

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

Etapa locală, 8 februarie 2020

CLASA a VIII-a

BAREM

1. Determinați perechile (a, b) de numere naturale nenule pentru care $a^2 - 6a = b^2 + b - 10$.

Soluție:

Din relația dată rezultă $(a - 3)^2 = b^2 + b - 1$...3p

pentru $b > 1$ avem $b^2 < b^2 + b - 1 < (b + 1)^2 \Rightarrow b^2 + b - 1$ nu este pătrat perfect ...2p

pentru $b = 1 \Rightarrow (a - 3)^2 = 1 \Rightarrow (a, b) \in \{(2, 1), (4, 1)\}$...2p

2. Să se rezolve ecuația: $x + \frac{x-2}{2} + \frac{x-4}{3} + \frac{x-6}{4} + \dots + \frac{x-2016}{1009} + \frac{x-2018}{1010} = -2020$.

Soluție:

Ecuația dată este echivalentă cu

$$(x + 2 - 2) + \left(\frac{x+2}{2} - 2\right) + \left(\frac{x+2}{3} - 2\right) + \dots + \left(\frac{x+2}{1010} - 2\right) = -2020$$
 ...3p

$$x + 2 + \frac{x+2}{2} + \frac{x+2}{3} + \dots + \frac{x+2}{1010} - 2020 = -2020$$
 ...1p

$$(x + 2) \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{1010}\right) = 0$$
 ...1p

$$\text{Arată că } 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{1010} \neq 0$$
 ...1p

$$x = -2 \text{ soluție}$$
 ...1p

3. În triunghiul ABC , bisectoarea $[BE, E \in (AC)]$ intersectează mediana $[AD], D \in (BC)$ în G . Pe planul triunghiului se ridică perpendiculara FG .

a) Arătați că $\frac{AG}{GD} \cdot \frac{CE}{AE} = 2$;

- b) Dacă G este centrul de greutate al triunghiului ABC și $FG = GD = AE = a$, calculați distanța de la B la planul (FAC) .

Soluție:

a) Aplicând teorema bisectoarei se obține: $\frac{AG}{GD} = \frac{2AB}{BC}$ respectiv $\frac{CE}{AE} = \frac{BC}{AB}$ de unde rezultă cerința. ...2p

- b) Dacă G este centrul de greutate al triunghiului ABC ,

$$\Rightarrow \frac{AG}{GD} \cdot \frac{CE}{AE} = 2 \Leftrightarrow \frac{2}{1} \cdot \frac{CE}{AE} = 2 \Leftrightarrow CE = AE$$

Deci triunghiul ABC este isoscel de bază (AC)

$$\Rightarrow BE \perp AC$$

$$\Delta AGF \overset{CC}{\equiv} \Delta CGF \Rightarrow \Delta AFC \text{ is} \Rightarrow FE \perp AC \Rightarrow AC \perp (BEF)$$

Construim $BQ \perp FE, BQ \subset (BEF) \Rightarrow AC \perp BQ \Rightarrow BQ \perp (FAC) \Rightarrow d(B, (FAC)) = BQ$

...3p

Dacă $FG = GD = AE = a \Rightarrow EC = a, AG = 2a$

Din calcul, $GE = a\sqrt{3}, BE = 3a\sqrt{3}, FE = 2a;$

$$\Rightarrow BQ \cdot FE = FG \cdot BE \Rightarrow BQ \cdot 2a = a \cdot 3a\sqrt{3} \Rightarrow BQ = \frac{3a\sqrt{3}}{2}$$

...2p

4. Fie ΔABC dreptunghic cu $m(\hat{A}) = 90^\circ$ și $E \in (AB), F \in (AC)$ astfel încât $EF \parallel BC$ și $\frac{AE}{AB} = \frac{2}{3}$.

Se dă $AB = \frac{15}{2}$ și $AC = 10$. Triunghiul ABC se îndoaie după dreapta EF astfel încât

$(AEF) \perp (BEC)$. Aflați perimetrul ΔABC după îndoire.

Soluție:

Înainte de îndoire :

fie $AP \perp BC, P \in BC$ și $\{Q\} = AP \cap EF$.

$$\text{calculăm : } BC = \frac{25}{2}, AP = \frac{\frac{15}{2} \cdot 10}{\frac{25}{2}} = 6, AQ = \frac{2}{3} \cdot 6 = 4, QP = 2$$

$$PB^2 = AB^2 - AP^2 \Rightarrow PB^2 = \frac{81}{4} \text{ și } PC^2 = AC^2 - AP^2 \Rightarrow PC^2 = 64 \quad \dots 3p$$

După îndoire :

$AQ \perp EF, PQ \perp EF \Rightarrow m(\angle AQP) = 90^\circ$, ca unghi plan coresp. diedrului

$$\Rightarrow AP^2 = AQ^2 + QP^2 \Rightarrow AP^2 = 20$$

cum $AQ \perp BC, QP \perp BC \Rightarrow BC \perp (AQP) \Rightarrow AP \perp BC$

$$\text{Din } \Delta APB \text{ dreptunghic} \Rightarrow AB^2 = \frac{161}{4} \text{ și din } \Delta APC \text{ dr.} \Rightarrow AC^2 = 84$$

$$\text{Perimetrul } \Delta ABC \text{ după îndoire este egal cu } \frac{25 + \sqrt{161} + 4\sqrt{21}}{2}. \quad \dots 4p$$

Barem – clasa a VIII-a