Olimpiada Naţională de Matematică
Etapa finală, Braşov, 2 aprilie 2013
CLASA a VIII-a
SOLUŢII ŞI BAREME ORIENTATIVE

Problema 1. Prisma regulată dreaptă $ABCA'B'C'$, cu $AB = a$, are proprietatea că există un unic punct $M \in (BB')$ astfel încât $m(\sphericalangle AMC') = 90°$.

Determinaţi măsura unghiului format de dreapta AM cu planul (ACC').

Soluţie. Vom arăta mai întâi că M este mijlocul muchiei $[BB']$. Presupunând contrariul, fie $M' \in (BB')$ simetricul lui M faţă de mijlocul muchiei $[BB']$; atunci $M' \neq M$. Deoarece $\Delta MAB \equiv \Delta M'C'B'$ şi $\Delta M'AB \equiv \Delta MC'B'$, rezultă că $[MA] \equiv [M'C']$ şi $[M'A] \equiv [MC']$. Prin urmare, $\Delta MAC' \equiv \Delta M'C'A$, deci $m(\sphericalangle AMC') = m(\sphericalangle AM'C') = 90°$, contradicţie cu unicitatea alegerii lui M. .... **3 puncte**

Notând $BB' = h$, calculând AM, MC' şi AC' şi aplicând teorema lui Pitagora în triunghiul dreptunghic MAC', rezultă $h = a\sqrt{2}$ .... **2 puncte**

Dacă O este centrul feţei $(ACC'A')$, rezultă $MO \perp (ACC')$, deci unghiul format de dreapta AM cu planul (ACC') este unghiul MAO.

Cum $MO = OA = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$, triunghiul MOA este dreptunghic isoscel, deci $m(\sphericalangle MAO) = 45°$. . **2 puncte**

Problema 2. Pe o tablă de şah de dimensiuni infinite se mută o tură, alternativ pe orizontală şi pe verticală. Tura se deplasează un pătrăţel la prima mutare, două pătrăţele la a doua mutare şi, în general, n pătrăţele la a n-a mutare, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$.

Fie T mulţimea numerelor naturale n cu proprietatea că există un şir de n mutări după care tura revine la poziţia iniţială.

a) Arătaţi că $2013 \notin T$.

b) Determinaţi numărul elementelor mulţimii $T \cap \{1, 2, .., 2012\}$.

Soluţie. Putem considera pătrăţelele tablei de şah ca o reţea de puncte cu coordonate numere întregi (puncte laticiale), în care poziţia iniţială o presupunem a fi $(0, 0)$. Atunci, după fiecare mutare, una dintre coordonate va fi de forma $\pm 1 \pm 3 \pm 5 \pm ...$, iar cealaltă de forma $\pm 2 \pm 4 \pm 6 \pm ...$.

a) Prespunând $2013 \in T$, atunci există o alegere a semnelor $+$ şi $-$ pentru care au loc simultan relaţiile $\pm 1 \pm 3 \pm 5 \pm ... \pm 2013 = 0$ şi $\pm 2 \pm 4 \pm 6 \pm ... \pm 2012 = 0$.

Pentru orice combinaţie de semne, $\pm 1 \pm 3 \pm ... \pm 2013$ are aceeaşi paritate cu $1+3+...+2013 = 1007^2$, deci, în ipoteza că $2013 \in T$, ar rezulta că 0 şi 1007^2 au aceeaşi paritate, absurd .... **2 puncte**

Observaţie. Concluzia $2013 \notin T$ se obţine şi astfel: scriind $\pm 2 \pm 4 \pm ... \pm 2012 = 2 \cdot (\pm 1 \pm 2 \pm ... \pm 1006)$ şi observând că numărul $\pm 1 \pm 2 \pm ... \pm 1006$ are aceeaşi paritate cu $1 + 2 + ... + 1006 = 503 \cdot 1007$, în ipoteza că $2013 \in T$, ar rezulta că 0 şi $503 \cdot 1007^2$ au aceeaşi paritate, fals.

b) Condiţia $n \in T$ implică existenţa unor alegeri a semnelor $+$ şi $-$ pentru care să aibă loc simultan egalităţile:

$$\pm 1 \pm 3 \pm 5 \pm ... \pm \left(2 \cdot \left[\frac{n+1}{2}\right] - 1\right) = 0 \qquad (*)$$

$$\pm 2 \pm 4 \pm 6 \pm ... \pm \left(2 \cdot \left[\frac{n}{2}\right]\right) = 0 \qquad (**)$$

....**1 punct**

Din $(*)$ rezultă că 0 are aceeaşi paritate cu $1 + 3 + ... + \left(2 \cdot \left[\frac{n+1}{2}\right] - 1\right) = \left[\frac{n+1}{2}\right]^2$, deci $\left[\frac{n+1}{2}\right]$ trebuie să fie număr par. Acest lucru se întâmplă dacă $4 \mid n$ sau $4 \mid n+1$ **(1)**

Din $(**)$ rezultă că 0 are aceeaşi paritate cu $1 + 2 + ... + \left[\frac{n}{2}\right] = \frac{\left[\frac{n}{2}\right] \cdot \left(\left[\frac{n}{2}\right] + 1\right)}{2}$, adică $4 \mid \left[\frac{n}{2}\right]$ sau $4 \mid \left[\frac{n}{2}\right] + 1$. Se obţine că 8 divide unul dintre numerele $n-1$, n, $n+1$ sau $n+2$ **(2)**

Din **(1)** şi **(2)** rezultă că este necesar ca n să aibă forma $8k$ sau $8k-1$, unde $k \in \mathbb{N}^*$ **2 puncte**

Pentru orice $k \in \mathbb{N}^*$ avem $n = 8k \in T$, deoarece

$$(1-3-5+7) + (9-11-13+15) + ... + [(8k-7) - (8k-5) - (8k-3) + (8k-1)] = 0$$
$$(2-4-6+8) + (10-12-14+16) + ... + [(8k-6) - (8k-4) - (8k-2) + (8k)] = 0$$

....

De asemenea, pentru orice $k \in \mathbb{N}^*$ avem $n = 8k - 1 \in T$, deoarece

$$(1-3-5+7) + (9-11-13+15) + ... + [(8k-7) - (8k-5) - (8k-3) + (8k-1)] = 0$$
$$(2+4-6) + (8-10-12+14) + ... + [(8k-8) - (8k-6) - (8k-4) + (8k-2)] = 0$$

....

Se obţine că $T \cap \{1, 2, .., 2012\}$ are 502 elemente ....**2 puncte**

Problema 3. Determinaţi numărul real $x > 0$ şi numărul natural nenul n pentru care

$$[x] + \left\{\frac{1}{x}\right\} = 1,005 \cdot n.$$

Soluţie. Ecuaţia se scrie $[x] + \left\{\frac{1}{x}\right\} = \frac{201}{200} n = n + \frac{n}{200}$. Notând cu q, respectiv r, câtul şi restul împărţirii lui n la 200, rezultă că

$$[x] + \left\{\frac{1}{x}\right\} = n + q + \frac{r}{200}.$$

Partea întreagă a expresiei din membrul stâng este egală cu $[x]$, iar partea întreagă a expresiei din membrul drept este $n+q$, deci $[x] = 201q + r$ şi $\left\{\frac{1}{x}\right\} = \frac{r}{200}$ .... **2 puncte**

Dacă $x < 1$, atunci $[x] + \left\{\frac{1}{x}\right\} = \left\{\frac{1}{x}\right\} < 1 < 1,005 \cdot n$, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$. Dacă $x = 1$, se obţine $1 = 1,005 \cdot n$, imposibil. Ca urmare, $x > 1$, deci $0 < \frac{1}{x} < 1$, adică $\left\{\frac{1}{x}\right\} = \frac{1}{x}$. Rezultă $\frac{1}{x} = \frac{r}{200}$, deci $r \neq 0$ şi $x = \frac{200}{r}$. ....**2 puncte**

Folosind faptul că $[x] \leq x < [x] + 1$, rezultă $201q + r \leq \dfrac{200}{r} < 201q + r + 1$,deci $201qr + r^2 \leq 200 < 201qr + r(r+1)$. Cum $q, r \in \mathbb{N}$, inegalităţile de mai sus nu pot avea loc pentru $qr \geq 1$, deci $qr = 0$. Deoarece $r \neq 0$, rezultă $q = 0$, deci $r^2 \leq 200 < r(r+1)$, de unde se obţine $r = 14$, $n = 14$ şi $x = \dfrac{100}{7}$ ....**3 puncte**

Problema 4. Numim *specială* o mulţime M de numere reale cu proprietăţile:

(i) pentru orice $x, y \in M$, $x \neq y$, numerele $x + y$ şi xy sunt nenule, exact unul dintre ele fiind raţional;

(ii) pentru orice $x \in M$, numărul x^2 este iraţional.

Aflaţi numărul maxim de elemente ale unei mulţimi *speciale*.

Soluţie. Numărul maxim cerut este 4, un exemplu de mulţime *specială* cu 4 elemente fiind $M = \left\{\sqrt{2} - 1, \sqrt{2} + 1, 2 - \sqrt{2}, -2 - \sqrt{2}\right\}$ ....**2 puncte**

Vom arăta că nu există mulţimi *speciale* cu cel puţin 5 elemente. Evident, toate elementele unei mulţimi *speciale* M sunt iraţionale (rezultă din a doua condiţie). Vom utiliza următoarele observaţii:

O1. Dacă x, y, z sunt trei elemente distincte ale lui M, atunci $x + y$, $x + z$ şi $y + z$ nu pot fi toate raţionale.

Presupunând contrariul, rezultă $2(x + y + z) \in \mathbb{Q}$, de unde $x + y + z \in \mathbb{Q}$ şi $x \in \mathbb{Q}$, absurd. ..**1 punct**

O2. Dacă x, y, z sunt trei elemente distincte ale lui M, atunci xy, xz şi yz nu pot fi toate raţionale.

Presupunând contrariul, rezultă $x^2yz = (xy) \cdot (xz) \in \mathbb{Q}$ şi, cum $yz \in \mathbb{Q}$, rezultă $x^2 \in \mathbb{Q}$, absurd. **1 punct**

O3. Dacă $x, y \in M$ şi $xy \in \mathbb{Q}$, atunci, pentru orice $z \in M$, avem $x + z \in \mathbb{Q}$ şi $y + z \in \mathbb{Q}$.

În caz contrar, din ipoteză şi observaţiile anterioare, rezultă că $x + z \in \mathbb{Q}$ şi $yz \in \mathbb{Q}$ sau $y + z \in \mathbb{Q}$ şi $xz \in \mathbb{Q}$. În primul caz, din $xy \in \mathbb{Q}$ şi $yz \in \mathbb{Q}$, rezultă $xy + yz = y(x + z) \in \mathbb{Q}$ şi, cum $x + z \in \mathbb{Q}$ şi $x + z \neq 0$ (din ipoteză!), rezultă $y \in \mathbb{Q}$, contradicţie. Celălat caz este identic. ....**1 punct**

Să presupunem acum că există o mulţime *specială* cu cel puţin 5 elemente a, b, c, d, e. Din **O1**, cel puţin două elemente au suma număr iraţional; fie acestea a şi b. Atunci $ab \in \mathbb{Q}$, iar din **O3** se obţine că $a + c$, $a + d$, $a + e$ sunt raţionale. Conform **O1**, numerele $c + d$, $c + e$ şi $d + e$ nu pot fi raţionale, iar din ipoteză rezultă că cd, ce şi de sunt raţionale, ceea ce contrazice **O2** ....**2 puncte**