

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

Etapa locală, 8 februarie 2020

Clasa a XI-a

BAREM

1. Se consideră matricea $A = \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ -2 & -2 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. (a) Arătați că, pentru orice număr natural nenul n, există $x_n \in \mathbb{N}$ astfel încât $A^n = x_n \cdot A$; (b) Determinați $X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ pentru care $A \cdot X = X \cdot A$; (c) Determinați $Y \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ pentru care $Y^3 - 3Y^2 = A$.		
1.	(a) $x_n = (-4)^n, n \in \mathbb{N}^*$ (demonstrație)	(2p)
	(b) $X = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$	(1p)
	(c) $Y^4 - 3Y^3 = AY = YA \Rightarrow Y = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$. Se obține, pentru $Y = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$, din relația $Y^3 - 3Y^2 = A$, egalând elementele omoloage și rezolvând sistemul de ecuații obținut:	(1p)
	Soluțiile: $Y_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, Y_2 = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}, Y_3 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}, Y_4 = \begin{pmatrix} \frac{5}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{5}{2} \end{pmatrix}$	(2p)
2. Se consideră matricea $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$. Se cere: i) Calculați A^n; ii) Arătați că există două matrici $B, C \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$ pentru care $A = B^3 + C^3$.		
2.	(a) $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1-2^2 & 2^2 \end{pmatrix}$	(1p)
	$A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1-2^n & 2^n \end{pmatrix}, (\forall) n \in \mathbb{N}^*$	(2p)
	(b) $A^2 - \text{tr}A \cdot A + \det A \cdot I_2 = O_2$ $A^2 - 3 \cdot A + 2 \cdot I_2 = O_2$ $A^3 - 3 \cdot A^2 + 2 \cdot A = O_2$	(1p)

$A^3 - 3 \cdot A^2 + 2 \cdot A - A^2 + 3 \cdot A - 2 \cdot I_2 = O_2$ $(A - I_2)^3 = (A - I_2)^2$	(1p)
$(A - I_2)^2 = (A - I_2)$	(1p)
$(A - I_2)^3 = A - I_2 \Rightarrow A = (A - I_2)^3 + I_2$ $B = A - I_2, C = I_2$	(1p)
3. Fie $(x_n)_{n \geq 1}$ un șir de numere reale strict pozitive, astfel încât $x_{n+1}^3 < 3x_n - 2$. Arătați că $(x_n)_{n \geq 1}$ este convergent și calculați limita sa.	
$x_{n+1}^3 - x_n^3 < -x_n^3 + 3x_n - 2 = -(x_n + 2)(x_n - 1)^2 \leq 0$	(2p)
$x_{n+1} \leq x_n \Rightarrow (x_n)_{n \geq 1}$ strict descrescător	(1p)
$x_n > 0, (\forall) n \in \mathbb{N}^* \Rightarrow x_n \in (0, 1)$ Deci $(x_n)_{n \geq 1}$ mărginit, deci convergent	(1p)
Trecând la limită $\Rightarrow l^3 \leq 3l - 2, l \geq 0$	(1p)
Finalizare $l = 1$	(2p)
4. Calculați limita $L = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \cos x)(1 - \cos^2 x) \dots (1 - \cos^n x)}{\sin^{2n} x + \ln(1 + x^{2n}) + \sqrt[n]{1 + x^{2n}} - 1}$, pentru $n \in \mathbb{N}^*$.	
$L = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \cos x)(1 - \cos^2 x) \dots (1 - \cos^n x)}{x^{2n}} \cdot \frac{x^{2n}}{\sin^{2n} x + \ln(1 + x^{2n}) + \sqrt[n]{1 + x^{2n}} - 1} = L_1 \cdot L_2$	(1p)
$L_1 = \lim_{x \rightarrow 0} \prod_{k=1}^n \frac{1 - \cos^k x}{x^2} = \prod_{k=1}^n \frac{k}{2} = \frac{n!}{2^n}$	(3p)
$L_2 = \frac{1}{1 + 1 + \frac{1}{n}} = \frac{n}{2n + 1}$	(1p)
$L_2 = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\frac{\sin^{2n} x}{x^{2n}} + \frac{\ln(1 + x^{2n})}{x^{2n}} + \frac{(1 + x^{2n})^{\frac{1}{n}} - 1}{x^{2n}}}$	(1p)
Finalizare	(1p)

Barem – clasa a XI-a