

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ - 17 februarie 2018

Clasa a XI - a

SUBIECTUL I (7p)

Se consideră matricea $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

- a) Să se rezolve ecuația $\det(xI_3 - A) = 0$;
b) Să se calculeze A^n , $n \in \mathbf{N}^*$.

SUBIECTUL II (7p)

Fie $f: [1, \infty) \rightarrow \mathbf{R}$ o funcție cu proprietatea că există $a > 1$ astfel încât $\frac{1}{2}a^x \leq f(x) \leq a^x$, $(\forall)x \geq 1$.

Studiați convergența șirului $(a_n)_{n \geq 1}$, dat de: $a_n = (f(1) + f(2) + \dots + f(n))^{\frac{1}{n}}$.

S:L.17270

SUBIECTUL III (7p)

Se consideră ecuația matriceală $X^2 = A$, cu $A \in M_2(\mathbf{R})$. Să se arate că:

- a) Dacă $\det A < 0$, atunci ecuația nu are soluții;
b) Dacă $\det A > 0$ și $\text{tr} A > 2\sqrt{\det A}$, atunci ecuația are 4 soluții;
c) Dacă $\det A > 0$ și $0 < \text{tr} A < 2\sqrt{\det A}$, atunci ecuația are 2 soluții.

SUBIECTUL IV (7p)

Fie șirul $(a_n)_{n \geq 1}$ definit prin $a_n = \sum_{k=1}^n \frac{k}{k^4 + k^2 + 1}$, $(\forall)n \geq 1$. Determinați $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \arctg(1 - 2a_k)$.

S:L.17272

NOTĂ: Timp de lucru – 3 ore