OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ
SUCEAVA
16 februarie 2013

CLASA a XII-a

1. Fie $U(\mathbb{Z}_{49})=\{x\in\mathbb{Z}_{49} \mid x \text{ este simetrizabil în raport cu înmulțirea }\}$.

a) Arătaţi că $(U(\mathbb{Z}_{49}),\cdot)$ este grup cu 42 de elemente.

b) Determinați ordinul lui $\widehat{30}$ în grupul $(U(\mathbb{Z}_{49}),\cdot)$.

c) Să se găsească în $(U(\mathbb{Z}_{49}),\cdot)$ un element de ordin 42.

2. Fie k un număr natural nenul și $(G,\cdot)$ un grup cu n elemente. Să se arate că următoarele afirmații sunt echivalente:

i) Pentru orice subgrup H al grupului G avem $H=\{a^k \mid a\in H\}$.

ii) $(k,n)=1$.

3. a) Fie $n\in\mathbb{N}^*$. Calculați $\displaystyle\int_{\frac{1}{n}}^{n}\frac{1}{x^2+x+1}\,dx$.

b) Calculați $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_{\frac{1}{n}}^{n}\frac{\operatorname{arctg} x}{x^2+x+1}\,dx$.

4. Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ o funcție continuă şi $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ o primitivă a sa.
Dacă $f(x)\ge \operatorname{arctg}|x|$, $\forall x\in\mathbb{R}$, demonstrați că există $x_0\in\mathbb{R}$ astfel încât $F(x_0)=x_0$.

Notă: 1. Toate subiectele sunt obligatorii.
2. Fiecare subiect se punctează de la 0 la 7.
3. Timp de lucru 3 ore.