

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

Etapa locală - 10.02.2024

Clasa a XI – a

PROBLEMA 1.a) Să se determine valorile lui a și b , astfel încât

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(a\sqrt[3]{x^3 + bx^2 + a} + b\sqrt{x^2 + ax + b} - 5x \right) = 5;$$

b) Să se calculeze $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \frac{k^2 + 2k + 2}{k(k+1)(k+2)!} \right)^{(n+3)!}$.

PROBLEMA 2. Se consideră șirul $(x_n)_{n \geq 0}$, definit prin $x_0 > 1$ și $x_{n+1} = \frac{2x_n + 1}{x_n + 2}$, pentru $n \in \mathbb{N}$. Să se studieze convergența șirului $(x_n)_{n \geq 0}$ și să se calculeze $\lim_{n \rightarrow \infty} n^2 (\sqrt{x_n} - 1)$.

PROBLEMA 3. Să se rezolve în $M_2(\mathbb{R})$, ecuația matriceală $X^2 = A$, unde $A = \begin{pmatrix} 7 & 10 \\ 15 & 22 \end{pmatrix}$.

PROBLEMA 4. Se consideră matricea $A \in M_2(\mathbb{R})$. Să se arate că dacă $\text{tr} A^{2024} = 1$ și $\det(A^{2023} + A^{2022} + \dots + A + I_2) = 0$, atunci $\det A = 0$.

¹Timpul efectiv de lucru este de 3 ore;²Toate problemele sunt obligatorii;³Fiecare problemă se notează de la 0 la 7.