

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ, 16.02.2014

CLASA a VI-a

1. a) Arătați că $\frac{1}{4 \cdot 10} = \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{10} \right)$.

b) Arătați că $\frac{1}{4 \cdot 10} + \frac{1}{10 \cdot 16} + \frac{1}{16 \cdot 22} + \dots + \frac{1}{2008 \cdot 2014} < 0,5$.

Soluție:

a) $\frac{1}{4 \cdot 10} = \frac{1}{6} \cdot \frac{6}{4 \cdot 10} = \frac{1}{6} \cdot \frac{10 - 4}{4 \cdot 10} = \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{10} \right)$ 3p

b) Utilizând a) obținem:

$$S = \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{10} + \frac{1}{10} - \frac{1}{16} + \dots + \frac{1}{2008} - \frac{1}{2014} \right) = \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2014} \right)$$
 3p

$$\frac{1}{6} \cdot \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2014} \right) < \frac{1}{2}$$
 1p

2. Se dă unghiul alungit $\sphericalangle AOB$ și punctele C și D situate în semiplane opuse față de dreapta AB astfel încât, $m(\sphericalangle COD) = 80^\circ$. Dacă $[ON$ este bisectoarea unghiului $\sphericalangle AOC$, $[OM$ este bisectoarea unghiului $\sphericalangle BOD$ și $m(\sphericalangle BOC) = 150^\circ$, atunci calculați măsura unghiului $\sphericalangle MON$.

Supliment, G.M. , noiembrie 2013

Soluție:

$$m(\sphericalangle NOA) = (180^\circ - 150^\circ) : 2 = 15^\circ$$
 2p

$$m(\sphericalangle AOD) = 80^\circ - 30^\circ = 50^\circ$$
 2p

$$m(\sphericalangle BOD) = (180^\circ - 50^\circ) : 2 = 65^\circ$$
 2p

Finalizare $m(\sphericalangle MON) = 130^\circ$

1p

3. Se consideră ecuația $x^5 + y^2 = z^3$, unde x, y și z sunt numere naturale nenule. O soluție a acestei ecuații este un triplet de numere natural nenule (a, b, c) cu proprietatea că $a^5 + b^2 = c^3$.

a) Arătați că tripletul $(3, 10, 7)$ este soluție a ecuației date.

b) Determinați o soluție a ecuației date de forma $(2^m, 2^n, 2^p)$, unde m, n și p sunt numere naturale.

G.M., nr. 12, 2013

Soluție:

a) Verificare directă $3^5 + 10^2 = 7^3$ 2p

b) $2^{5m} + 2^{2n} = 2^{3p}$ 2p

Pentru $2^{5m} = 2^{2n} \Rightarrow 2^{5m+1} = 2^{2n+1} = 2^{3p}$ 2p

Alegem $m = 4, n = 10$ și $p = 7$. 1p

4. Fie $C \in (AB)$ și punctele P, M, T mijloacele segmentelor $(AB), (AC)$ și (MP) . Dacă $2 \cdot AC - BC = 40$ cm, atunci determinați lungimea segmentului $[TC]$.

Daniela și Nicolae Stănică, Brăila

Soluție:

Cazul I: $P \in (BC), T \in (MC)$

$AC = 2x, CB = 2y \Rightarrow 2x - y = 20$ 2p

$PC = y - x$ și $MP = y$ 2p

$MT = \frac{y}{2} \Rightarrow TC = x - \frac{y}{2} = \frac{2x - y}{2} = 10$ cm 2p

Cazurile II: $P \in (BC), T \in (CP)$ și III: $P \in (AC)$ se studiază 1p

asemănător și se obține $TC = 10$ cm