



OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ
Etape locală, SĂLAJ, 11.02.2023

BAREM DE NOTARE

Clasa a VI-a

Subiectul 1

a) Determinați numărul natural $n \in \mathbb{N}$ astfel încât egalitatea să fie adevărată:

$$3^1 \cdot 3^2 \cdot 3^3 \cdot \dots \cdot 3^n - (9^{1262})^2 = 2^3 \cdot (3^2)^{2524}.$$

b) Fie $a = (3^{11})^3 : 9^{15} - (2^4)^{15} : 8^{20}$. Determinați numărul elementelor mulțimii

$$A = \{x \in \mathbb{N} \mid 3 \leq x \leq a\}.$$

SOLUȚIE:

a) $3^1 \cdot 3^2 \cdot 3^3 \cdot \dots \cdot 3^n = 3^{\frac{n(n+1)}{2}}$
 $(9^{1262})^2 = 3^{5048}$; $2^3 = 8$; $(3^2)^{2524} = 3^{5048}$ 2 p

$$3^{\frac{n(n+1)}{2}} = 8 \cdot 3^{5048} + 3^{5048} \Rightarrow 3^{\frac{n(n+1)}{2}} = 9 \cdot 3^{5048} \dots\dots\dots 1 \text{ p}$$

$$3^{\frac{n(n+1)}{2}} = 3^{5050} \Rightarrow \frac{n(n+1)}{2} = 5050 \dots\dots\dots 1 \text{ p}$$

$$n(n+1) = 10100$$

$$n(n+1) = 100 \cdot 101$$

$$n = 100 \dots\dots\dots 1 \text{ p}$$

b) $a = 3^{33} : 3^{30} - 2^{60} : 2^{60} =$
 $= 3^3 - 2^0 = 27 - 1 = 26 \dots\dots\dots 1 \text{ p}$

$$\Rightarrow A = \{3; 4; \dots 26\} \Rightarrow \text{card } A = 24 \dots\dots\dots 1 \text{ p}$$

Total: 7 puncte

Subiectul 2

Fie a și b numere naturale mai mici decât 100, unde $a < b$. Aflați cele două numere știind că c.m.m.d.c. al lor este număr prim și acesta este de 15 ori mai mic decât c.m.m.m.c. al aceluiași numere.

SOLUTIE:

Dacă notăm $(a, b) = p$, $p = \text{nr. prim}$, atunci.....1 p

$[a, b] = pxy$. Din $[a, b] = 15 \cdot (a, b) \Rightarrow pxy = 15p \Rightarrow x \cdot y = 15$1 p

Deoarece $(x, y) = 1$ și $x < y$ rezultă $x = 1, y = 15$ sau $x = 3, y = 5$ 1 p

Cazul I. Pentru $x = 1, y = 15 \Rightarrow a = p, b = 15p$, $p \in \{2, 3, 5\}$, obținem soluțiile

$(a, b) \in \{(2, 30), (3, 45), (5, 75)\}$2p

Cazul II. Pentru $x = 3, y = 5 \Rightarrow a = 3p, b = 5p$, $p \in \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19\}$, obținem

soluțiile $(a, b) \in \{(6, 10), (9, 15), (15, 25), (21, 35), (33, 55), (39, 65), (51, 85), (57, 95)\}$ 2p

Total: 7 puncte

Subiectul 3

Unghiurile AOB, BOC și COD au interioarele disjuncte două câte două și suma măsurilor de 150° . Știind că $b \cdot \angle AOB = a \cdot \angle BOC$ și $c \cdot \angle BOC = b \cdot \angle COD$, unde a, b, c sunt numere prime care îndeplinesc condiția $a + 3b + 15c = 123$, calculați măsura unghiului format de bisectoarele unghiurilor $\angle BOC$ și $\angle COD$.

SOLUTIE:

Din relația $a + 3b + 15c = 123$, observăm că $3b, 15c$ și 123 sunt divizibile cu 3 $\Rightarrow a$ divizibil cu 3.....1p

dar a nr prim $\Rightarrow a = 3$, $b = 5$, $c = 7$2p

Din $5 \cdot \angle AOB = 3 \cdot \angle BOC$, $7 \cdot \angle BOC = 5 \cdot \angle COD$ și

$\angle AOB + \angle BOC + \angle COD = 150^\circ \Rightarrow$1p

$\angle BOC = 50^\circ$, $\angle AOB = 30^\circ$, $\angle COD = 70^\circ$2p

Construim (OE, (OF bisectoarele unghiurilor BOC respectiv COD

$\Rightarrow \angle EOF = 60^\circ$1p

Total: 7 puncte

Subiectul 4

Pe cercul de centru O și rază R se iau punctele M, N, P, Q (în această ordine), în sensul de mișcare a acelor de ceasornic, astfel încât arcele $\widehat{QM}, \widehat{NP}, \widehat{PQ}, \widehat{QM}$ sunt invers proporționale cu numerele : 0,2; 0,25; 0,1(6) respectiv 0,(3).

a) să se calculeze măsurile arcelor $\widehat{MN}, \widehat{NP}, \widehat{PQ}, \widehat{QM}$.

b) dacă punctul R este mijlocul arcului $\widehat{PQ}$ și $\angle QRO = 60^\circ$, arătați că $MP \parallel RQ$.

SOLUTIE:

a) $0,2 \cdot \widehat{MN} = 0,25 \cdot \widehat{NP} = 0,1(6) \cdot \widehat{PQ} = 0,(3) \cdot \widehat{QM}$ 1p

$\widehat{MN} = 5k, \widehat{NP} = 4k, \widehat{PQ} = 6k, \widehat{QM} = 3k$1p

$\widehat{MN} = 100^\circ, \widehat{NP} = 80^\circ, \widehat{PQ} = 120^\circ, \widehat{QM} = 60^\circ$ 1p

b) $\widehat{MP} = 180^\circ \Rightarrow M, O, P$ coliniare.....1p

$\widehat{QM} = 60^\circ \Rightarrow \sphericalangle MOQ = 60^\circ$ 1p

R mijlocul arcului

$\widehat{PQ} \Rightarrow \widehat{QR} = \widehat{RP} = 60^\circ$

$\widehat{RP} = 60^\circ \Rightarrow \sphericalangle POR = 60^\circ$

$\sphericalangle QRO = \sphericalangle ROP$ (alterne interne)

Rezultă $MP \parallel RQ$2p

Total: 7 puncte