



CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ „ADOLF HAIMOVICI”

Etapa locală, 19.02.2017

Filiera tehnologică: profilul servicii, resurse naturale și protecția mediului

BAREM DE CORECTARE ȘI NOTARE

Clasa a XII-a

1. Pe mulțimea numerelor reale definim legea de compoziție

$$x * y = 2(x - 1)(y - 1) + 1, (\forall) x, y \in \mathbb{R}.$$

- Calculați $2 * 3'$, unde $3'$ este simetricul elementului 3.
- Aflați $m \in \mathbb{R}$ dacă $x * x * x = 2^m(x - 1)^3 + 1, (\forall) x \in \mathbb{R}$.
- Pe tablă sunt scrise numerele de la $\{0, 1, 2, 3, \dots, 25\}$. În clasă sunt 25 de elevi. Fiecare copil vine la tablă alege la întâmplare 2 numere, le șterge și pune în loc rezultatul compunerii lor după legea dată. Ce număr va scrie ultimul copil pe tablă?

Soluție:

$$\text{a) elementul neutru este } e = \frac{3}{2} \dots\dots\dots 1\text{p}$$

$$\text{Simetricul lui 3 este } 3' = \frac{9}{8} \dots\dots\dots 1\text{p}$$

$$2 * 3' = \frac{5}{4} \dots\dots\dots 1\text{p}$$

$$\text{b) } x * x = 2(x - 1)^2 + 1 \dots\dots\dots 1\text{p}$$

$$x * x * x = 2^2(x - 1)^3 + 1 \dots\dots\dots 1\text{p}$$

$$2^2(x-1)^3 + 1 = 2^m(x-1)^3 + 1 \Rightarrow m=2$$

$$\text{c) 1 elementul absorbant} \dots\dots\dots 1\text{p}$$

$$1 * x = 1 \text{ și de aici rezultă că ultimul număr scris va fi } 1 \dots\dots\dots 1\text{p}$$

$$2. \text{ Fie funcția } f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad f(x) = \frac{3}{(x^2+1)(x^2+4)}.$$

$$\text{a) Aflați } a, b \text{ dacă } F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, F(x) = a \cdot \arctg x + b \cdot \arctg \frac{x}{2} \text{ este o primitivă a lui } f.$$

$$\text{b) Calculați } \int_0^1 (x^4 - 1) \cdot f(x) dx.$$

$$\text{c) Calculați } \int_0^1 x \cdot f(x) dx.$$

Soluție:

$$\text{a) } F'(x) = f(x) \quad F \text{ derivabila } \dots\dots\dots 1\text{p}$$

$$\frac{a}{1+x^2} + \frac{2b}{4+x^2} = \frac{3}{(x^2+1)(x^2+4)} \dots\dots\dots 1p$$

$$a=1, b= -\frac{1}{2}$$

$$b) \int_0^1 \frac{3(x^2-1)}{x^2+4} = 3 \int_0^1 1 - \frac{5}{x^2+4} = 3(x - \arctg \frac{x}{2}) \Big|_0^1 = 3(1 - \frac{5}{2} \arctg \frac{1}{2}) \dots\dots\dots 2p$$

$$c) \int_0^1 \frac{3x}{(x^2+1)(x^2+4)} dx = \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{3}{(t+1)(t+4)} dt = \frac{1}{2} (\ln \frac{8}{5}) \dots\dots\dots 2p$$

3. Fie funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{2x}{x^2+1}$.

Arătați că $\int_0^2 f(x) dx > \int_2^3 f(x) dx + \int_3^4 f(x) dx$.

Soluție:

$$\text{Calculează } \int_0^2 f(x) dx = \ln 5 \dots\dots\dots 2p$$

$$\int_2^3 f(x) dx + \int_3^4 f(x) dx = \int_2^4 f(x) dx \dots\dots\dots 1p$$

$$\text{Calculeaza } \dots\dots\dots 2p$$

$$\text{Finalizare } \dots\dots\dots 2p$$

4.

- Determinați soluțiile ecuației $x^2 = \hat{2} + x$, în inelul $(Z_6, +, \cdot)$.
- Numim „ideală” perechea de tipul $(\hat{a}, \hat{b})$ cu $\hat{a}, \hat{b} \in Z_4$ și $a+b = \hat{0}$. Determinați perechile ideale de tipul $(\hat{a}, \hat{b})$.
- Calculați produsul elementelor inversabile din Z_6 .

Soluție:

$$a) x = \hat{2} \dots\dots\dots 3p$$

$$x = \hat{5}$$

$$b) (\hat{0}, \hat{0}), (\hat{1}, \hat{3}), (\hat{2}, \hat{2}), (\hat{3}, \hat{1}), \dots\dots\dots 2p$$

$$c) U(Z_6) = \{\hat{1}, \hat{5}\} \dots\dots\dots 1p$$

$$\hat{1} \cdot \hat{5} = \hat{5} \dots\dots\dots 1p$$