

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

– ETAPA LOCALĂ, 24.02.2019 –

CLASA A V-A

Subiecte

1. Găsiți toate numerele de trei cifre de forma $\overline{abc}$ pentru care $\overline{abc} + \overline{acb} = 1165$

Prof. Crăciun Gheorghe, Ploiesti

2. a. Arătați că 10^2 se poate scrie ca suma a patru cuburi perfecte.

b. Determinați numerele naturale nenule m, n, p, q distincte, știind că $m^3 + n^3 + p^3 + q^3 = 10^{2021}$.

Prof. Achim Gheorghe, Mizil

3. La un tur ciclist, traseul a fost parcurs în cinci zile astfel: în fiecare din cele 5 zile s-au parcurs $16 \cdot n$ km și încă o treime din distanța ce a mai rămas după parcurgerea celor $16 \cdot n$ km în acea zi, unde n reprezintă numărul zilei.

a. Aflați câți km s-au parcurs în a treia zi.

b. Aflați lungimea traseului parcurs.

Prof. Brabeceanu Ionel, Plopeni

4. Se consideră numărul $n = 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{2019} + 2^{2020} + 2^{2021}$.

a. Aflați restul împărțirii lui n la 21.

b. Aflați x din relația

$$(1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{2019} + 2^{2020} + 2^{2021}) : (1 + 2^6 + 2^{12} + 2^{18} + \dots + 2^{2016}) + x^5 \cdot 64 = 2111$$

Prof. Negrilă Anton, Ploiești

Notă:

Timp de lucru : 2 ore. Fiecare subiect se notează cu puncte de la 0 la 7.

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

– ETAPA LOCALĂ, 24.02.2019 –

CLASA A VI-A

Subiecte

1. Fie numerele raționale care satisfac egalitatea $\frac{a}{a+b} + \frac{b}{b+c} + \frac{c}{c+a} = 2$.

Calculați $\frac{b}{a+b} + \frac{c}{b+c} + \frac{a}{c+a}$.

Prof. Gheorghe Achim, Mizil

2. Determinați cardinalul mulțimii: $M = \left\{ n \in \mathbb{N} / n = \overline{a2b} \text{ si } (3^n + 4) : 13 \right\}$.

Prof. Ionel Brabeceanu, Plopeni

3. În jurul punctului O se consideră unghiurile AOB, BOC, COD, DOE și EOA, astfel încât OA și OD sunt semidrepte opuse, $\sphericalangle BOC$ este un unghi drept, iar $3 \cdot \sphericalangle DOE = 2 \cdot \sphericalangle AOE$. Știind că bisectoarea unghiului BOC formează cu OA un unghi de 70° , aflați măsurile unghiurilor AOB, COD și DOE.

4. Determinați numerele naturale a, b, c știind că a^3, b^2, c^4 sunt invers proporționale cu numerele: $0,0625; 0,(3); 0,08(3)$ și $\frac{1}{72}a^2b^3 = 54c^3$.

Prof. Negrilă Anton, Ploiești

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

– ETAPA LOCALĂ, 24.02.2019 –

CLASA A VII-A

Subiecte

1. Determinați numărul natural n care verifică egalitatea:

$$\frac{1}{3 \cdot 5} + \frac{2}{5 \cdot 9} + \frac{4}{9 \cdot 17} + \dots + \frac{2^{n-1}}{(2^n + 1)(2^{n+1} + 1)} = \frac{2^{2019} - 1}{3 \cdot (2^{2020} + 1)}$$

2. Fie triunghiul ABC cu $m(\sphericalangle A) = 150^\circ$ și $m(\sphericalangle B) = 10^\circ$. Fie $M \in [BC]$ astfel încât $[BM] \equiv [AC]$ și $N \in [AB]$ astfel încât $m(\sphericalangle ANC) = 20^\circ$.

- a) Arătați ca triunghiurile AMN și ABM sunt isoscele;
b) Dacă $AN = x$, $CN = y$ și $AC = z$, aflați perimetrele triunghiurilor AMN și ABC.

Prof. Gheorghe Achim, Mizil

3. Determinați numerele prime p și q , $p < q < 100$, astfel încât $\sqrt{2p^2 + 2q^2 + 52} = 118\sqrt{2}$

Prof. Gabriel Țaga, Gazeta matematică 12/2018

4. În triunghiul ABC, cu $m(\sphericalangle A) = 90^\circ$, punctul M este mijlocul laturii (BC), iar punctul P este situat pe latura (AC) astfel încât $AC = 3 \cdot AP$. Arătați că bisectoarea unghiului BPM este paralelă cu dreapta AB.

Prof. Gheorghe Bumbăcea, Bușteni

Notă:

Timp de lucru : 3 ore. Fiecare subiect se notează cu puncte de la 0 la 7.

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

– ETAPA LOCALĂ, 24.02.2019 –

CLASA A VIII-A

Subiecte

1. a. Descompuneți în factori $n^4 + 4$, unde $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$.

b. Arătați că numărul 390629 nu este număr prim.

Prof. Achim Gheorghe, Mizil

2. Determinați numerele reale x, y, z știind că $x^4 + 1 \leq y^3 + z, y^4 + 1 \leq z^3 + x, z^4 + 1 \leq x^3 + y$.

Prof. Petre Năchilă, Ploiești

3. Pe planul triunghiului dreptunghic ABC, $AB = AC = a$, se duce perpendiculara $AD = b$.

Fie $AP \perp BD, P \in BD$ și H proiecția lui A pe planul (BDC); demonstrați că :

a. Punctele C , H , P sunt coliniare

b. $\frac{1}{AH^2} = \frac{4}{BC^2} + \frac{1}{AD^2}$

Prof . Bilciurescu Ion , Boldești – Scăeni

4. Pe planul trapezului dreptunghic ABCD cu $AB \parallel CD, m(\sphericalangle A) = m(\sphericalangle D) = 90^\circ, AC \perp BD, AB = 32\text{ cm}$,

$CD = 8\text{ cm}$ se ridică perpendiculara MP, unde $AP = PD$ și $MP = 8\sqrt{3}\text{ cm}$.

a. Calculați distanța de la punctul M la dreapta BC .

b. Calculați măsura unghiului plan corespunzător diedrului format de planele (MAB) și (MCD) .

c. Construiți distanța de la punctul P la planul (MBC) și aflați lungimea acesteia.

Prof.Negrilă Anton, Ploiești

Notă:

Timp de lucru : 3 ore. Fiecare subiect se notează cu puncte de la 0 la 7.

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

– ETAPA LOCALĂ, 24.02.2019 –

CLASA A IX-A

Subiecte

1. Arătați că, pentru orice n număr natural nenul, numărul $2^{2n-1} - (-2)^{n-1} - 1$ se divide cu 9.

Gazeta matematică, nr.9/2018

2. Dacă $a, b, c > 0$, demonstrați că:

$$\frac{1}{abc + ab + ac} + \frac{1}{abc + ac + bc} + \frac{1}{abc + ab + bc} \leq \frac{6 + a^2 + b^2 + c^2}{9abc}$$

Prof. Coman Vasile, Valenii de Munte

3. Rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuația $\left[\frac{x+1}{2}\right] + \left[\frac{3x-1}{4}\right] = x$, unde $[a]$ reprezintă partea întreagă a numărului a .

Prof. Militaru Claudiu, Ploiești

4. Se consideră paralelogramul $ABCD$, $AC \cap BD = \{O\}$. Fie $E \in (AB)$ astfel încât

$AE = k \cdot EB$, $k > 0$, și G_1, G_2, G_3, G centrele de greutate ale triunghiurilor ADE , CDE , ECB respectiv $G_1G_2G_3$. Demonstrați că $G \in (AC) \cup (BD) - \{O\} \Leftrightarrow k \in \left\{2, \frac{1}{2}\right\}$.

Prof. Militaru Claudiu, Ploiești



OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

– ETAPA LOCALĂ, 24.02.2019 –

CLASA A X-A

Subiecte

1. Arătați că :

$$\log_a \frac{a+b+c}{3} + \log_b \frac{a+b+c}{3} + \log_c \frac{a+b+c}{3} \geq 3, \text{ pentru orice } a, b \in (1; \infty).$$

2. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația:

$$[\log_{16} x] + [\log_{16} (2x)] + [\log_{16} (4x)] + [\log_{16} (8x)] = \log_2 \frac{32}{\sqrt[4]{x}}, \text{ unde } [x] \text{ este partea}$$

întreagă a numărului x .

elev Ducu Victor, Sinaia

3. Determinați $x, y, z \in \mathbb{C}^*$, știind că $x \cdot |y^2| = z^4$, $y \cdot |z^2| = x^4$, $z \cdot |x^2| = y^4$.

Prof. Petre Năchilă, Ploiești

4. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuațiile:

a. $2^{[2^x]} + 3^{[3^x]} = 5^{[5^x]}$

b. $2^{2^{[x]}} + 3^{3^{[x]}} = 5^{5^{[x]}}$

Prof. Vasile Emil, Ploiești

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

– ETAPA LOCALĂ, 24.02.2019 –

CLASA A XI-A

Subiecte

1. Calculați: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + (1^2 + 2^2) + (1^2 + 2^2 + 3^2) + \dots + (1^2 + 2^2 + \dots + n^2)}{1^3 + 3^3 + \dots + (2n-1)^3}$

2. Determinați matricele $A, B \in M_2(\mathbb{Q})$ care verifică relațiile :

$$A^2 + 2B^2 = \begin{pmatrix} 4 & -4 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \text{ și } AB + BA = \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Prof. Gabriel Necula, Breaza

3. Fie matricele $A, B \in M_2(\mathbb{Z})$ cu proprietățile $AB = BA$ și $\det A = \det B = \frac{1}{4} \det(A^2 + B^2) = 1$. Arătați că 4 divide numerele $\det(A^{2019} + B^{2019})$ și $\det(A^{2019} - B^{2019})$.

Prof. Octavian Purcaru, Ploiești

4. Fie șirul $(x_n)_{n \geq 1}$ cu $x_1 = x_2 = 1$, $x_{n+1} = x_1 + \frac{x_1 x_2}{2!} + \dots + \frac{x_1 \dots x_n}{n!}$, oricare ar fi $n \geq 2$.

a) Arătați că $x_1 \dots x_n \leq \frac{n!}{2^{n-1}}$;

b) Arătați că șirul $(x_n)_{n \geq 1}$ are limita a și $a < 2$;

c) Calculați $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{x_{n+1}}{x_n} \right)^{\frac{n!}{2^n}}$

Prof. Emil Vasile, Ploiești

Notă:

Timp de lucru : 3 ore. Fiecare subiect se notează cu puncte de la 0 la 7.

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

– ETAPA LOCALĂ, 24.02.2019 –

CLASA A XII-A

Subiecte

1. Fie $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție continuă cu proprietatea: $f(x) + f(-x) = x^2 + 2, \forall x \in \mathbb{R}$.

Calculați:
$$I = \int_{-1}^1 \frac{f(x)}{x^4 + 4} dx$$

Prof. Roxana Soare, Ploiești

2. Fie $G = (1, 3)$ și pentru orice $x, y \in G$ definim legea $x * y = \frac{2xy - 3x - 3y + 6}{xy - 2x - 2y + 5}$.

a) Arătați că G este parte stabilă în raport cu legea $*$;

b) Presupunând că $(G, *)$ este grup abelian, arătați că $(G, *) \cong (\mathbb{R}_+, \cdot)$.

3. Fie $(G, \circ)$ un grup finit. Notăm cu $O(G) = \{n \in \mathbb{N}^* / \exists x \in G \text{ cu } \text{ord } x = n\}$.

a) Găsiți grupurile G_1 abelian și G_2 neabelian astfel încât $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \subset O(G_1)$, respectiv

$$\{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \subset O(G_2);$$

b) Există G abelian cu $O(G) = \{1, 3, 5\}$? Dar G neabelian cu $O(G) = \{1, 3\}$?

Prof. Emil Vasile, Ploiești

4. Fie funcțiile $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \int_0^x t^2 e^{\frac{(x-t)(x+t)}{x^2}} dt$, $x \neq 0$, $f(0) = 0$ și $g: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = \frac{f(x)}{x^4(1+x^{2019})}$.

Arătați că:

a) f este o funcție impară și continuă;

b) Orice primitivă G a funcției g admite asimptotă orizontală.

Prof. Octavian Purcaru, Ploiești

Notă:

Timp de lucru : 3 ore. Fiecare subiect se notează cu puncte de la 0 la 7.