INSPECTORATUL ŞCOLAR JUDEŢEAN V A S L U I
TELEFON: 0235/311928
FAX: 0235/311715
e-mail: isjvaslui@isj.vs.edu.ro
website : http://isj.vs.edu.ro
Nr............ din......................

MINISTERUL EDUCAŢIEI NAŢIONALE

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ – ETAPA LOCALĂ

16 februarie 2014-CLASA a VII-a

1. a) Arătaţi că pentru orice x,y>0 este adevarată relaţia: $\frac{x+y}{2} \geq \sqrt{x \cdot y}$

   b) Arătaţi că: $12 \leq \frac{3}{\sqrt{2}} + \frac{5}{\sqrt{6}} + \frac{7}{\sqrt{12}} + \frac{9}{\sqrt{20}} + \frac{11}{\sqrt{30}} + \frac{13}{\sqrt{42}} < 13$

2. a) Fie numărul $a = \sqrt{2} + \sqrt{2^2} + \sqrt{2^3} + \sqrt{2^4} + \cdots + \sqrt{2^{2014}}$ şi $b = 2^{1007} - 1$.
   Calculaţi $\frac{b}{a}$.

   b) Să se arate că dacă n este număr natural de trei cifre, numărul $\sqrt{n + \sqrt{n-1}}$ nu este natural.

3. În triunghiul echilateral ABC notăm cu G punctul de intersecţie al medianelor AM, $M \in (BC)$ şi BN, $N \in (AC)$. Perpendiculara din N pe AB intersectează perpendiculara în C pe BC în punctul P. Demonstraţi că:
   a) patrulaterul GNPM este trapez isoscel;
   b) patrulaterul GPCM este dreptunghi;
   c) patrulaterul GPMB este paralelogram.

4. Se consideră triunghiul echilateral ABC şi punctele $D, E \in (BC)$ astfel încât $m(\sphericalangle BAD) = m(\sphericalangle CAE) = 20^o$, $F \in (AD)$ şi $G \in (AE)$ astfel încât $m(\sphericalangle ABF) = m(\sphericalangle CBG) = 20^o$, iar $I \in (AE)$ astfel încât $\sphericalangle ABI \equiv \sphericalangle CBI$.
   a) Demonstraţi că $FI \parallel BC$.
   b) Dacă $AD \cap BG = \{H\}$, determinaţi măsurile unghiurilor triunghiului FGH.

(*G.M. nr. 11/2013*)

Toate subiectele sunt obligatorii.

Timp de lucru 3 ore.

Fiecare subiect rezolvat corect se notează cu 7 puncte

BAREM DE NOTARE **-16 februarie 2014-CLASA a VII-a**

Sub.		**Puncte**	
1.	**a)**	**2p**	$\frac{x+y}{2} \geq \sqrt{x \cdot y} \Longrightarrow \left(\sqrt{x} - \sqrt{y}\right)^2 \geq 0$
7p	**b)**	**1p**	Din $\frac{x+y}{\sqrt{x+y}} \geq 2$, $\frac{3}{\sqrt{2}} = \frac{1+2}{\sqrt{1 \cdot 2}} \geq 2$
		1p	obtinem : $12 \leq \frac{3}{\sqrt{2}} + \frac{5}{\sqrt{6}} + \frac{7}{\sqrt{12}} + \frac{9}{\sqrt{20}} + \frac{11}{\sqrt{30}} + \frac{13}{\sqrt{42}}$
			Pentru orice n numar natural are loc $n(n+1) \geq n$
		2p	$\frac{1}{\sqrt{n(n+1)}} < \frac{1}{n}$, $\frac{3}{\sqrt{1 \cdot 2}} < \frac{3}{1}$ obţinem
		1p	$\frac{3}{\sqrt{2}} + \frac{5}{\sqrt{6}} + \frac{7}{\sqrt{12}} + \frac{9}{\sqrt{20}} + \frac{11}{\sqrt{30}} + \frac{13}{\sqrt{42}} < 13$
2.	**a)**	**1p**	Înmultim $a = \sqrt{2} + \sqrt{2^2} + \sqrt{2^3} + \sqrt{2^4} + \cdots + \sqrt{2^{2014}}$ cu $\sqrt{2}$
		1p	$a\sqrt{2} = \sqrt{2^2} + \sqrt{2^3} + \sqrt{2^4} + \cdots + \sqrt{2^{2015}}$ şi scădem
		1p	Obţinem $a = \frac{\sqrt{2}(2^{1007}-1)}{\sqrt{2}-1}$ de unde $\frac{b}{a} = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}$
7p	**b)**	**1p**	n-1 pătrat perfect, $n - 1 \in \{100,121,144,\cdots 961\}$
		1p	$n \in \{101,122,145,\cdots 962\}$
		2p	Numerele 111, 133,157, 183, 211,...931,993 nu sunt pătrate perfecte
3.	**a)**	**1p**	Dacă $PN \cap AB = \{E\}$, $m(\sphericalangle ANE) = m(\sphericalangle PNC) - m(\sphericalangle NCP) = 30^o$ şi atunci ΔPNC este isoscel, de unde NP=PC (1)
		1p	$[MN]$ linie mijlocie în $\Delta ABC \rightarrow MN = MC$ (2) Folosind (1) şi (2) se demonstrează că $MP \perp NC$ (3) Din (3) şi $GN \perp AC \rightarrow MPNG$ trapez (4)
		1p	Se arată că $m(\sphericalangle GMP) = m(\sphericalangle NPM) = 60^o$ (5) Din (4) şi (5) $\rightarrow$ $GNPM$ trapez isoscel.

7p	**b)**	**1p** **1p**	GNPM trapez isoscel → GM=NP şi cum NP=PC → GM=PC (6) Din (6) şi $GM \perp BC$, $PC \perp BC$ → $GPCM$ dreptunghi
	c)	**2p**	Din GPCM dreptunghi → $GP \parallel BM$ (7) Din GNPM trapez → $BG \parallel MP$ (8) Din (7) şi (8) → $GPMB$ paralelogram.
4. **7p**	**a)**	**1p** **1p** **1p** **1p**	Se arată că BE=DC (1) ΔABG isoscel → AG=GB (2) ΔABF isoscel → AF=BF (3) Din (2), (3) şi CA=CB → $C - G - F$ În ΔABE aplicând teorema bisectoarei: $\frac{AI}{IE} = \frac{AB}{EB}$ (4) În ΔADC aplicând teorema bisectoarei: $\frac{AF}{FD} = \frac{AC}{CD}$ (5) Din (1), (4), (5) şi AB=AC → $\frac{AI}{IE} = \frac{AF}{FD}$ şi conform reciprocei teoremei lui Thales → $FI \parallel BC$
	b)	**1p** **1p** **1p**	$m(\sphericalangle FGH) = m(\sphericalangle BHD) = 60^o$ $m(\sphericalangle HGF) = \frac{1}{2} \cdot m(\sphericalangle AGB) = 50^o$ $m(\sphericalangle HFG) = 70^o$

Orice altă metodă care conduce la soluţie primeşte punctaj maxim.