

MATEMATIKA OLIMPIÁSZ
KÖRZETI SZAKASZ

2017. január 28.

XII. OSZTÁLY

1.) Adott a $G = \left\{ A(x) = \begin{pmatrix} 1+2x & 4x \\ -x & 1-2x \end{pmatrix} \mid x \in \mathbb{Z} \right\}$ halmaz.

a) Mutasd ki, hogy $A(x) \cdot A(y) = A(x+y)$, $\forall x, y \in \mathbb{Z}$.

b) Mutasd ki, hogy G Ábel-féle csoport a másodrendű négyzetes mátrixok szorzására nézve!

c) Számítsd ki a $B = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}^n$, $n \in \mathbb{N}^*$ mátrixot!

2.) A $H = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ halmazon értelmezzük az:

$$x \circ y = \begin{cases} x - y + 2, & \text{ha } (x - z)(y - z) \geq 0, \forall z \in H \\ x + y - 3, & \text{ha } \exists z \in H, (x - z)(y - z) < 0 \end{cases} \text{ műveletet.}$$

a) Ellenőrizd, hogy a H halmaz, zárt részhalmaz-e a " $\circ$ " műveletre nézve!

b) Oldd meg az $x \circ 3 = 1$ és $3 \circ x = 1$, $x \in H$ egyenleteket!

3.) Adott az $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ primitiválható és zérushely nélküli függvény, valamint a

$$g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, g(x) = \begin{cases} 2016 \cdot f(x), & x < 2018 \\ 2017 \cdot f(x), & x \geq 2018 \end{cases} \text{ függvény.}$$

Ellenőrizd, hogy a g függvény primitiválható-e !

4.) Számítsd ki az $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \arccos \left(\frac{2017 - x^2}{2017 + x^2} \right)$ függvény primitív

függvényeit !

Notă:

Toate subiectele sunt obligatorii.

Fiecare problemă se punctează cu 10 puncte.

Timp de lucru 3 ore