



Olimpiada de Matematică - Etapa Locală
Maramureș – 23 februarie 2019
Clasa a VIII - a
Barem

1. Determinați numerele reale x, y, z pentru care

$$\sqrt{x^2 + 2x + 26} + \sqrt{y^2 - 8y + 25} + \sqrt{z^2 - 10z + 61} = 14.$$

Soluție:

$$\text{Avem } \underbrace{\sqrt{(x+1)^2 + 25}}_{\geq 5} + \underbrace{\sqrt{(y-4)^2 + 9}}_{\geq 3} + \underbrace{\sqrt{(z-5)^2 + 36}}_{\geq 6} = 14. \dots\dots\dots (4p)$$

$$\text{Deci } x = -1, y = 4, z = 5. \dots\dots\dots (3p)$$

2. a) Să se arate că $4xy \leq (x+y)^2, \forall x, y \in \mathbb{R}$.

b) Dacă $x, y, z \in \mathbb{R}_+ \setminus \{4\}$, astfel încât $x + y + z = 4$, arătați că $\frac{xy}{4-z} + \frac{yz}{4-x} + \frac{zx}{4-y} \leq 2$.

Soluție:

$$\text{a) } 4xy \leq (x+y)^2 \Leftrightarrow (x-y)^2 \geq 0, \text{ adevărat.} \dots\dots\dots (2p)$$

$$\text{b) } 4xy \leq (x+y)^2 \Leftrightarrow \frac{xy}{x+y} \leq \frac{x+y}{4}, \forall x, y \in \mathbb{R}_+ \dots\dots\dots (1p)$$

$$\text{De unde rezultă că } \frac{xy}{x+y} + \frac{yz}{y+z} + \frac{zx}{z+x} \leq \frac{x+y+y+z+z+x}{4} \dots\dots\dots (2p)$$

$$\text{Folosind } x + y + z = 4 \text{ rezultă cerința.} \dots\dots\dots (2p)$$

3. Fie $ABCD$ un trapez dreptunghic cu $AB \parallel CD, AC \perp BD, m(\sphericalangle A) = 90^\circ$,
 $AB = 12\sqrt{3} \text{ cm}, CD = 4\sqrt{3} \text{ cm}$ și M mijlocul segmentului $[AD]$. Se construiește
 $PM \perp (ABC)$ cu $PM = 8 \text{ cm}$. Să se calculeze:

- aria trapezului $ABCD$ și aria triunghiului MBC ;
- distanța de la punctul P la CB și tangenta unghiului diedru format de planele (PBC) și (ABC) ;
- distanța de la M la planul (PBD) ;
- cosinusul unghiului format de planele (PAB) și (PDC) .

Soluție:

$$\text{a) } AD = 12 \text{ cm}, BC = 4\sqrt{21} \text{ cm}, A_{ABCD} = 96\sqrt{3} \text{ cm}^2, A_{BCM} = 48\sqrt{3} \text{ cm}^2 \dots\dots\dots (1p)$$

$$\text{b) } d(P; BC) = PT = \frac{32\sqrt{7}}{7} \text{ cm}, d(P; CD) = 10 \text{ cm.} \dots\dots\dots (1p)$$

$$\sphericalangle((PBC), (ABC)) = \sphericalangle PTM, \text{tg } \sphericalangle PTM = \frac{\sqrt{7}}{3} \dots\dots\dots (2p)$$

$$\text{c) } d(M; (PBD)) = MS = \frac{24\sqrt{3}}{\sqrt{91}} \text{ cm.} \dots\dots\dots (2p)$$

$$\text{d) } \sphericalangle((PAB), (PCD)) = \sphericalangle APD, \cos \sphericalangle APD = \frac{7}{25} \dots\dots\dots (1p)$$



4. Determinați câte numere de 2 cifre trebuie considerate astfel încât să fim siguri că cel puțin trei dintre ele au aceeași sumă a cifrelor.

Soluție:

Formăm grupe după suma cifrelor: cu suma 1 avem nr. 10; cu suma 2 avem nr. 20, 11; cu suma 3 avem cel puțin 3 nr.; cu suma 4 sunt cel puțin 3 nr., ș.a.m.d., până la suma 16 când avem nr. 88, 97, 79; cu suma 17 avem nr. 98, 89; cu suma 18 avem nr. 99.....**(3p)**

Dacă considerăm un nr. cu suma 1, un nr. cu suma 18, și câte 2 nr. cu suma din restul sumelor, adică 34 de nr., nu sunt suficiente. Conform principiul cutiei trebuie considerate 35 de numere..... **(4p)**