

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ

Faza locală

Braşov, 16 februarie 2018

Soluţii

Clasa a V-a

1. Într-o zi a anului 2017, întrebând de un reporter ce vârstă are fiul său, tatăl a răspuns: "Fiul meu s-a născut după anul 2000 şi are vârsta egală cu suma cifrelor anului naşterii." În ce an s-a născut copilul şi ce vârstă va avea în 2018?

Aurel Aldea

Soluţie. Fie $\overline{20xy}$ anul naşterii băiatului, $2 + x + y$ suma cifrelor anului naşterii. Vârsta băiatului este de $2017 - \overline{20xy}$ ani.

Atunci, $2017 - \overline{20xy} = 2 + x + y$, adică $2017 - 2000 - 10x - y = 2 + x + y$ **3 puncte**

$15 = 11x + 2y$, de unde $x = 1$ şi $y = 2$ **2 puncte**

Anul naşterii băiatului va fi 2012 **1 punct**

În 2018 va avea 6 ani. **1 punct**

2. Determinaţi numerele naturale a şi b care verifică următoarea propoziţie matematică: $5^{a^2+b+3} - 5^{a^2+1} = 600$.

Ioana Ciocirlan

Soluţie. $5^{a^2+b+3} - 5^{a^2+1} = 2^3 \cdot 3 \cdot 5^2$ **1 punct**

(a) $a = 0$ implică $5^{b+2} - 1 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5$, imposibil, membrul stâng nu se divide prin 5. **2 puncte**

(b) $a = 1$ şi $25 \cdot 5^b = 25$, iar $b = 1$ **2 puncte**

(c) $a > 1$ implică $5^5(5^b - 1) > 2^3 \cdot 3 \cdot 5^2$, deci nu avem alte soluţii. **2 puncte**

3. Pe o tablă sunt scrise numerele: 1, 3, 7, 8, 9, 10, 13, 16, 22. Ana şterge patru numere, iar Dan şterge alte patru numere. Ce număr a rămas pe tablă dacă suma numerelor şterse de Dan este de două ori mai mare decât suma numerelor şterse de Ana?

Gazeta Matematică

Soluţie. $1 + 3 + 7 + 8 + 9 + 10 + 13 + 16 + 22 = 89$ **1 punct**

Ana şterge $\{a_1, a_2, a_3, a_4\} \subset \{1, 3, 7, 8, 9, 10, 13, 16, 22\}$ cu $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = A$.

Dan şterge $\{b_1, b_2, b_3, b_4\} \subset \{1, 3, 7, 8, 9, 10, 13, 16, 22\}$ cu $b_1 + b_2 + b_3 + b_4 = 2A$ **2 puncte**

$A + 2A + x = 89$, $3A = 89 - x \Rightarrow 3 \mid 89 - x$ **2 puncte**

$x \in \{1, 3, 7, 8, 9, 10, 13, 16, 22\}$, iar singura posibilitate este $x = 8$ **2 puncte**

4. Fie numerele naturale, nenule, a și b , astfel încât $6a + 5b = 600$.

(a) Arătați că a este divizibil cu 5 și $a < 100$.

(b) Arătați că $100 < a + b < 120$.

(c) Dacă $c = 2^{n+3} \cdot 3^n + 2^n \cdot 3^{n+2} + 1$, $n \in \mathbb{N}^*$, aflați câtul și restul împărțirii numărului $x = 102 \cdot a + 85 \cdot b + 100 \cdot c$ la 1700, unde a și b sunt numerele care satisfac relația din enunț.

Dorina Bocu

Soluție.

(a) $5b:5, 600:5 \Rightarrow a:5$

$6a = 600 - 5b \Rightarrow 6a < 600$ și $a < 100$ **2 puncte**

(b) $6(a + b) - b = 600 \Rightarrow 6(a + b) > 600$ și $a + b > 100$

$5(a + b) + a = 600 \Rightarrow 5(a + b) < 600$ și $a + b < 120$ **2 puncte**

(c) $c = 17 \cdot 6^n + 1$ **1 punct**

$x = 102 \cdot a + 85 \cdot b + 100 \cdot c = 17(6a + 5b) + 100c = 1700(6 + 6^n) + 100$. Deci, câtul împărțirii lui x la 1700 este $6^n + 6$, iar restul 100. **2 puncte**

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ

Faza locală

Braşov, 16 februarie 2018

Soluţii

Clasa a VI-a

1. La împărţirea unui număr natural n cu 32, 63 şi 72, se obţine, de fiecare dată, restul 2. Determinaţi cel mai mic număr natural n , de patru cifre, care are această proprietate.

Adriana Caţaron

Soluţie. Din teorema împărţirii cu rest, $n = 32 \cdot c_1 + 2$, $n = 63 \cdot c_2 + 2$, $n = 72 \cdot c_3 + 2$
... **3 puncte**

Atunci $n - 2 = 32 \cdot c_1$, $n - 2 = 63 \cdot c_2$, $n - 2 = 72 \cdot c_3$ **1 punct**

Dar, $[32, 63, 72] = 2^5 \cdot 3^2 \cdot 7 = 2016$ **1 punct**

$n - 2 \in \mathcal{M}_{2016} = \{0, 2016, 4032, \dots\}$ **1 punct**

n are 4 cifre, deci $n - 2 = 2016$, $n = 2018$ **1 punct**

2. Determinaţi cel mai mic număr natural n , pentru care numărul $a \in \mathbb{N}$, unde

$$a = \frac{27^{n+3} - 3 \cdot 27^{n+2} - 2 \cdot 3^{3n+5}}{3^{2017} - 3^{2016} + 3^{2015}}.$$

Gazeta Matematică: Supliment cu Exerciţii

Soluţie. După calcule, $a = \frac{3^{3n+5} \cdot 70}{3^{2015} \cdot 7}$ **4 puncte**

$a \in \mathbb{N} \Leftrightarrow 3^{3n+5} : 3^{2015}$ **1 punct**

$3n + 5 \geq 2015 \Leftrightarrow n \geq 670$ **1 punct**

Cel mai mic număr n pentru care $a \in \mathbb{N}$ este $n = 670$ **1 punct**

3. Să se determine măsura celui mai mic unghi propriu care are proprietatea că suplementul complementului său împărţit la $\frac{7}{22}$, $\frac{3}{11}$, $\frac{5}{6}$ dă ca rezultat un număr natural.

Aurel Aldea

Soluţie. Fie a măsura unghiului căutat şi b măsura suplementului complementului său. $b : \frac{7}{22} \in \mathbb{N} \Rightarrow b : 7$ **2 puncte**

Analog, $b : 3$ şi $b : 5$, deci $b \in \{0, 105, 210, \dots\}$ **3 puncte**

Din mulţimea de mai sus, pentru $180^\circ - (90^\circ - a) = 90^\circ + a$, doar $a = 15^\circ$ soluţie.

... **2 puncte**

4. În triunghiul ascuțitunghic MNP ($[MN] < [MP]$), O este mijlocul laturii $[NP]$, $NA \perp MO$, $PB \perp MO$ și $C \in (AM)$ astfel încât $[MC] = 2[AO]$. Arătați că

(a) $\widehat{ANB} \equiv \widehat{BPA}$.

(b) $[CP] \equiv [MN]$.

Dorina Bocu

Soluție.

- (a) Avem $\triangle NAO \equiv \triangle PBO$ (IU sau LUU), $\triangle BON \equiv \triangle AOP$ (LUL) și $\triangle BAN \equiv \triangle ABP$ (LLL), de unde $\widehat{ANB} \equiv \widehat{BPA}$ **3 puncte**
- (b) $MC = 2AO$, $AB = 2AO$ de unde $MC = AB$ și $BC = AM$.
 $\triangle MAN \equiv \triangle CBP$ (CC sau LUL) și $CP \equiv MN$ **4 puncte**

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ

Faza locală

Braşov, 16 februarie 2018

Soluţii

Clasa a VII-a

1. Fie $A = \frac{1}{1^2+1} + \frac{1}{2^2+2} + \frac{1}{3^2+3} + \dots + \frac{1}{2017^2+2017}$. Arătaţi că $A \cdot \frac{2018}{2017}$ este un număr natural.

Gazeta Matematică

Soluţie. $A = \frac{1}{1(1+1)} + \frac{1}{2(2+1)} + \frac{1}{3(3+1)} + \dots + \frac{1}{2017(2017+1)} \dots\dots\dots$ **2 puncte**
 $A = \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{2017} - \frac{1}{2018} \dots\dots\dots$ **2 puncte**
 $A = \frac{2017}{2018} \dots\dots\dots$ **2 puncte**
 $A \cdot \frac{2018}{2017} = 1 \in \mathbb{N} \dots\dots\dots$ **1 punct**

2. Considerăm numerele raţionale $A = \frac{2^{2018}+1}{2^{2016}+1}$, $B = \frac{2^{2017}+1}{2^{2015}+1}$, $C = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{2018}+1}{\left(\frac{1}{2}\right)^{2016}+1}$ şi $D = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{2017}+1}{\left(\frac{1}{2}\right)^{2015}+1}$.

- (a) Arătaţi că $A > B$.
(b) Determinaţi $\max\{A, B, C, D\}$ şi $\min\{A, B, C, D\}$.

Ioana Maşca

Soluţie.

- (a) $A > B \Leftrightarrow (2^{2018} + 1)(2^{2015} + 1) > (2^{2017} + 1)(2^{2016} + 1) \Leftrightarrow 2^{2017}(2 - 1) > 2^{2015}(2 - 1)$, adevărat. $\dots\dots\dots$ **3 puncte**
(b) $C = \frac{1}{2^2}A < A$, $D = \frac{1}{2^2}B < B$, de unde $\max\{A, B, C, D\} = A$ şi $\min\{A, B, C, D\} = D$. $\dots\dots\dots$ **4 puncte**
3. În pătratul $ABCD$, punctul $E \in (AC)$ astfel încât $m(\widehat{ABE}) = 15^\circ$. $ABFE$ este un paralelogram cu E şi F de o parte şi de alta a dreptei BC .
- (a) Demonstraţi că $BFCE$ este trapez isoscel.
(b) Dacă $AE = 3\sqrt{2} - \sqrt{6}$ cm, $BE + 2AE = AB\sqrt{2}$ şi $\mathcal{P}_{BFCE} = 4\sqrt{6} + 6\sqrt{2}$ cm, aflaţi aria trapezului $BFCE$.

Dorina Rapcea

Soluție.

- (a) $ABCD$ pătrat, $m(\widehat{BAC}) = 45^\circ$, $ABFE$ paralelogram, $m(\widehat{ABF}) = 135^\circ$, deci $m(\widehat{FBC}) = 45^\circ$ **2 puncte**
 $\triangle ABE \equiv \triangle BCF$ (LUL) $\Rightarrow BE \equiv FC$
 $ABFE$ paralelogram $\Rightarrow BF \parallel EC$. Deci, $BFCE$ trapez isoscel **2 puncte**
- (b) Fie $CF \cap BE = \{M\}$. $\triangle MCE$ și $\triangle MBF$ echilaterale, $MB = BF = AE$,
 $ME = CE = BE + AE$.
 Cum $\mathcal{P}_{BFCE} = 4\sqrt{6} + 6\sqrt{2}$ obținem $AB = 6$ **1 punct**
 $\mathcal{A}_{BFCE} = \mathcal{A}_{ABC} = 18\text{cm}^2$ **2 puncte**
4. Fie $ABCD$ un paralelogram, $AC \cap BD = \{O\}$, $M \in DC$ astfel încât $CM = 2DM$ și $N \in BC$ astfel încât $BN = 2NC$. Aria triunghiului CMN este de 16 cm^2 .
- (a) Aflați aria paralelogramului $ABCD$.
- (b) Dacă $OM \cap AD = \{F\}$ astfel încât $FM = 2MO$, arătați că $BCFD$ paralelogram.

Ioana Ciocirlan

Soluție.

- (a) Fie F mijlocul MC
 $\mathcal{A}_{CTN} = \mathcal{A}_{MTN} = \frac{\mathcal{A}_{CMN}}{2} = 8\text{cm}^2$ **1 punct**
 $\mathcal{A}_{CDN} = 24\text{cm}^2$ **1 punct**
 $\mathcal{A}_{CDB} = 72\text{cm}^2$ **1 punct**
 $\mathcal{A}_{ABCD} = 144\text{cm}^2$ **1 punct**
- (b) În $\triangle FAC$, M centrul de greutate, CD mediană, $FD \parallel BC$, $FD \equiv BC$, deci $FDBC$ paralelogram. **3 puncte**

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ

Faza locală

Braşov, 16 februarie 2018

Soluţii

Clasa a VIII-a

1. Rezolvaţi în mulţimea numerelor raţionale ecuaţia:

$$\frac{x-2}{2017} + \frac{x-3}{2018} + \frac{x-4}{2019} = \frac{x+2013}{2} + \frac{x+2012}{3} + \frac{x+2011}{4}.$$

Gazeta Matematică: Supliment cu Exerciţii

Soluţie. $\frac{x-2}{2017} + 1 + \frac{x-3}{2018} + 1 + \frac{x-4}{2019} + 1 = \frac{x+2013}{2} + 1 + \frac{x+2012}{3} + 1 + \frac{x+2011}{4} + 1 \dots$ **2 puncte**

$(x+2015)\left(\frac{1}{2017} + \frac{1}{2018} + \frac{1}{2019}\right) = (x+2015)\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) \dots$ **2 puncte**

$(x+2015)\left[\left(\frac{1}{2017} + \frac{1}{2018} + \frac{1}{2019}\right) - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right)\right] = 0 \dots$ **2 puncte**

$x = -2015 \dots$ **1 punct**

2. Determinaţi numerele prime p pentru care există numere naturale nenule x şi y astfel încât $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{2018 \cdot p}$.

Aurel Bârsan

Soluţie. $0 < x, y < 2018 \cdot p$ (*) **1 punct**

$\sqrt{x} = \sqrt{2018 \cdot p} - \sqrt{y}$, $x = 2018 \cdot p + y - 2\sqrt{2018 \cdot p \cdot y} \Rightarrow \sqrt{2018 \cdot p \cdot y} \in \mathbb{Q}$, $2018 \cdot p \cdot y$ pătrat perfect **1 punct**

$2018 = 2 \cdot 1009$, 1009 număr prim.

(a) $p \notin \{2, 1009\}$, atunci $2018 \cdot p \cdot y$ pătrat perfect $\Leftrightarrow y = 2018 \cdot p \cdot k^2$, $k \in \mathbb{N}$, contradicţie cu (*). **2 puncte**

(b) Deci $p = 2$ sau $p = 1009$.

$p = 2$, $y = 1009 \cdot k^2$, $k \in \mathbb{N} \xRightarrow{(*)} k = 1$, iar $x = y = 1009 \dots$ **1 punct**

$p = 1009$, $y = 2 \cdot k^2$, $k \in \mathbb{N} \xRightarrow{(*)} k \in \{1, 2, \dots, 1008\}$, iar $x = 2(1009 - k)^2$ şi $y = 2k^2$, $k \in \{1, 2, \dots, 1008\} \dots$ **1 punct**

3. Fie un cub $ABCD A' B' C' D'$, M mijlocul laturii $[AB]$ şi E simetricul lui D' faţă de M . Demonstraţi că $DB' \perp (A' C' E)$.

Andrei Caţaron

Soluție. În $\triangle D'EC'$, $[MB]$ linie mijlocie. **1 punct**
 Atunci, $B \in EC'$ și $(EA'C') = (A'C'B)$ **1 punct**
 $A'C' \perp (DBB'D') \Rightarrow A'C' \perp DB'$ **2 puncte**
 $BC' \perp (DCB'A') \Rightarrow DB' \perp BC'$ **2 puncte**
 $A'C', BC' \subset (A'C'B)$, $A'C' \cap BC' = \{C'\}$; $DB' \perp A'C'$, $DB' \perp BC' \Rightarrow DB' \perp (A'C'B)$.
 ... **1 punct**

4. *CREATI* este o prismă triunghiulară dreaptă, cu toate muchiile de lungime 6 cm. M este mijlocul muchiei laterale $[AC]$.

- (a) Aflați distanța de la punctul M la planul $(TREI)$.
- (b) Aflați tangenta unghiului dintre dreptele AR și CI .

Dorina Bocu

Soluție.

- (a) $\triangle MCR \equiv \triangle MAI \equiv \triangle MAT \equiv \triangle MCE$ (CC), $TREI$ pătrat, $MTREI$ piramidă patrulateră reluată, $MO \perp (TREI)$, $d(M, (TREI)) = MO = 3\sqrt{3}$ cm.
 ... **3 puncte**
- (b) Construim S simetricul lui E față de C . $AICS$ paralelogram, iar $m(\widehat{AR, CI}) = m(\widehat{AR, AS}) = m(\widehat{SAR})$. Din $\triangle SER$, $m(\widehat{R}) = 90^\circ$, $SR = 6\sqrt{3}$.
 În $\triangle ASR$ isoscel, fie $AD \perp SR \Rightarrow SD = DR = 3\sqrt{3}$ cm.
 $\triangle ADS$, $m(\widehat{D}) = 90^\circ$, $AD = 3\sqrt{5}$.
 $\mathcal{A}_{SAR} = \frac{SR \cdot AD}{2} = \frac{AS^2 \cdot \sin \widehat{SAR}}{2} \Rightarrow \sin \widehat{SAR} = \frac{\sqrt{15}}{2}$, $\cos \widehat{SAR} = \frac{1}{4}$, iar $\operatorname{tg} \widehat{SAR} = \sqrt{15}$ **4 puncte**