



OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

FAZA LOCALĂ-Botoșani, 22.02.2015

Clasa a XI-a BAREM DE NOTARE

- ◆ Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul maxim corespunzător.
- ◆ Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.

Nr. problemei	Soluție, rezolvare	Punctaj
1.	$\det(A^3) = 216;$ $\det(A^3) = (\det A)^3 = 6^3 \Rightarrow \det A = 6;$	2p
	<i>Teorema Hamilton – Cayley:</i> $A^2 - \text{tr}(A) \cdot A + \det A \cdot I_2 = O_2, (\forall) A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R});$ $A^2 - 9 \cdot A + 6 \cdot I_2 = O_2 \Rightarrow A^3 = 9 \cdot A^2 - 6 \cdot A = 75 \cdot A - 54 \cdot I_2 \Rightarrow 75 \cdot A = A^3 + 54 \cdot I_2 \Rightarrow$	3p
	$75 \cdot A = \begin{pmatrix} 471 & 600 \\ 75 & 96 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 54 & 0 \\ 0 & 54 \end{pmatrix} \Rightarrow 75 \cdot A = \begin{pmatrix} 525 & 600 \\ 75 & 150 \end{pmatrix} \Rightarrow A = \begin{pmatrix} 7 & 8 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$	2p
2.	$1 < \log_{n^2+3n+1} (n \cdot (n+1) \cdot (n+2) \cdot (n+3)) < 2 \Leftrightarrow$ $n^2 + 3n + 1 < n \cdot (n+1) \cdot (n+2) \cdot (n+3) < (n^2 + 3n + 1)^2 \quad (1)$ Observând că $n \cdot (n+1) \cdot (n+2) \cdot (n+3) = (n^2 + 3n + 1)^2 - 1 \Rightarrow$ inegalitatea (1) este adevărată.	3p
	Din a) rezultă că $\{\log_{n^2+3n+1} n \cdot (n+1) \cdot (n+2) \cdot (n+3)\} = \log_{n^2+3n+1} n \cdot (n+1) \cdot (n+2) \cdot (n+3) - 1 =$ $\log_{n^2+3n+1} [(n^2 + 3n + 1)^2 - 1] - 1;$	2p
	Notând $n^2 + 3n + 1 = m \rightarrow \infty$, obținem: $\lim_{m \rightarrow \infty} [\log_m (m^2 - 1) - 1] = \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{\ln \frac{m^2 - 1}{m}}{\ln m} = \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{\ln m + \ln \left(1 - \frac{1}{m^2}\right)}{\ln m} = 1.$	2p
3.	$a_{n+1} = \frac{a_n}{1 + n \cdot a_n} \Leftrightarrow \frac{1}{a_{n+1}} - \frac{1}{a_n} = n, n \geq 1;$	2p

	$\left. \begin{array}{l} \frac{1}{a_2} - \frac{1}{a_1} = 1 \\ \frac{1}{a_3} - \frac{1}{a_2} = 2 \\ \frac{1}{a_4} - \frac{1}{a_3} = 3 \\ \vdots \\ \frac{1}{a_n} - \frac{1}{a_{n-1}} = n-1 \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{1}{a_n} = \frac{n^2 - n + 2}{2};$ $\frac{1}{a_1} + \frac{2}{a_2} + \frac{3}{a_3} + \dots + \frac{n}{a_n} = \sum_{k=1}^n \frac{k}{a_k} = \sum_{k=1}^n \frac{k \cdot (k^2 - k + 2)}{2} = \frac{1}{2} \cdot \sum_{k=1}^n (k^3 - k^2 + 2 \cdot k) =$ $\frac{1}{2} \cdot \left(\sum_{k=1}^n k^3 - \sum_{k=1}^n k^2 + 2 \sum_{k=1}^n k \right) = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{n^2 \cdot (n+1)^2}{4} - \frac{n \cdot (n+1) \cdot (2n+1)}{6} + \frac{2 \cdot n \cdot (n+1)}{2} \right);$	3p
	$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^4} \cdot \left(\frac{1}{a_1} + \frac{2}{a_2} + \frac{3}{a_3} + \dots + \frac{n}{a_n} \right) =$ $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{n^2 \cdot (n+1)^2}{4} - \frac{n \cdot (n+1) \cdot (2n+1)}{6} + \frac{2 \cdot n \cdot (n+1)}{2} \right) = \frac{1}{8}$	2p
4.	a) Dacă $A^k = O_2 \Rightarrow (\det A)^k = 0 \Rightarrow \det A = 0$. După Hamilton-Cayley avem $A^2 - \alpha \cdot A + \det A \cdot I_2 = O_2 \rightarrow A^2 = \alpha A$. Se arată prin inducție matematică că $A^k = \alpha^{k-1} \cdot A$. Din $A^k = O_2$ rezultă că $\alpha = 0$ sau $A = O_2$ și în fiecare caz $A^2 = O_2$.	4p



	b) $f(x) = x, f: \mathcal{M}_2(\mathbb{C}) \rightarrow \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ este surjectivă. Presupunem prin reducere la absurd că: $f: \mathcal{M}_2(\mathbb{C}) \rightarrow \mathcal{M}_2(\mathbb{C}), f(x) = x^n$, cu $n \geq 2$ ar fi surjectivă. Deci pentru $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ cu $A = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ există $X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ astfel încât $X^n = A \Rightarrow X^{2n} = A^2 = O_2$. Dacă $X^{2n} = O_2$ rezultă că $X^2 = O_2$. Dacă $X^2 = O_2 \Rightarrow X^n = O_2 \Rightarrow A = O_2$, contradicție. Deci răspunsul este $n = 1$.	3p
--	--	-----------