

Olimpiada de matematică
Etapa locală, 21.02.2016
Clasa a X- a

Subiecte :

1. Arătați că numerele $a, b, c \in (1, \infty)$ verifică relația

$$\log_a \frac{b+c}{2} + \log_b \frac{a+c}{2} + \log_c \frac{a+b}{2} \geq 3 .$$

2. Fie $z \in \mathbb{C}$, $|z| = 1$. Arătați că :

a) $|u - z| = |1 - \bar{u} z|$, pentru orice $u \in \mathbb{C}$.

b) $|1 + z| + |1 + z^2| \geq |1 - z|$.

3. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{Z}$, $f(x) = [x\sqrt{2}] - [x]$, unde $[a]$ reprezintă partea întreagă a numărului a .

a) Să se calculeze $f(\sqrt{2})$.

b) Să se arate că f nu este injectivă.

c) Să se arate că f este surjectivă.

4. Fie $z = \cos \frac{2\pi}{7} + i \sin \frac{2\pi}{7}$ și $u = z + z^2 + z^4$, $v = z^3 + z^5 + z^6$.

a) Să se calculeze z^7 .

b) Să se arate că $u + v = -1$.

c) Să se arate că $uv = 2$.

*Notă. Toate subiectele sunt obligatorii. Timp de lucru : 3 ore .
La fiecare subiect se acordă de la 0 la 7 puncte.*