

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ, 17 FEBRUARIE 2018
CLASA a VI -a

BAREM DE CORECTARE

1. a) Determinați cifra x, știind că numărul $\frac{1}{x} + \frac{1}{0,(x)} + \frac{1}{0,0(x)}$ este natural.

b) Calculați $x = a + b$ și $y = c - d$, unde:

$$a = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2401}, \quad b = \frac{3}{6} + \frac{6}{9} + \frac{9}{12} + \dots + \frac{7200}{7203},$$

$$c = 1\frac{1}{2} + 1\frac{1}{3} + 1\frac{1}{4} + \dots + 1\frac{1}{2801}, \quad d = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2801}$$

Rezolvare

a) Transformarea $\frac{1}{x} + \frac{1}{x} + \frac{1}{x} \quad (1p) \quad \text{Calcul : } \frac{1}{x} + \frac{9}{x} + \frac{90}{x} = \frac{100}{x} \quad (1p)$

$$\frac{1}{9} \quad \frac{x}{90}$$

Determinarea lui $x \in \{1, 2, 4, 5\} \quad (1p)$

b) Pentru simplificarea fracțiilor $(1p) \quad \text{Asociere și calcul } a + b = 2400 \quad (1p)$
Pentru introducerea întregilor în fracții $(1p) \quad \text{Asociere și calcul } c - d = 2800 \quad (1p)$

2. Arătați că $N = 2012^n + 2013^n + 2017^n + 2018^n$ se divide cu 5, oricare ar fi numărul natural impar n .

Autor prof. Valeriu Gornoavă

Soluție și barem

n este un număr natural impar $\Rightarrow n = 4k+1$ sau $n=4k+3$, $k \in \mathbb{N}$ 2p

Dacă $n = 4k+1$, $k \in \mathbb{N}$ rezultă că $U(N) = U(2012^n + 2013^n + 2017^n + 2018^n) =$
 $= U(2^1 + 3^1 + 7^1 + 8^1) = U(2+3+7+8) = U(20) = 0 \Rightarrow N$ se divide cu 5. 2p

Dacă $n = 4k+3$, $k \in \mathbb{N}$ rezultă că $U(N) = U(2012^n + 2013^n + 2017^n + 2018^n) =$

$$=U(2^3+3^3+7^3+8^3)=U(8+27+343+512)=U(890)=0 \Rightarrow N \text{ se divide cu } 5. \quad 2p$$

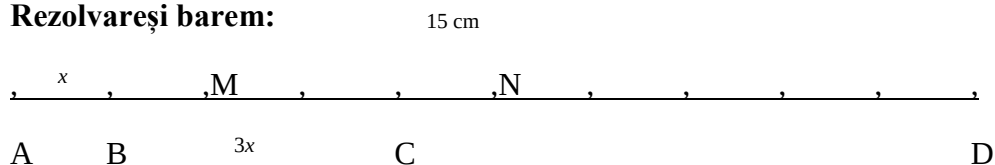
Rezultă că oricare ar fi n număr natural impar, $U(N)=0 \Rightarrow N$ se divide cu 5. 1p

(Prin $U(a)$ se înțelege ultima cifră a numărului natural a)

Total **7 p**

3. Se consideră punctele A, B, C, D, coliniare, astfel încât: $B \in [AC]$ și $C \in [BD]$ și $BC=3 \cdot AB$ iar $CD=2 \cdot BC$. Aflați lungimile segmentelor AB, BC, CD dacă M și N sunt mijloacele segmentelor [AC], respectiv [AD] iar $MN=15$ cm.

Rezolvareși barem:



1 p fig

din ipoteză $\Rightarrow$ ordinea este A – B – C – D

Notăm $AB=x$

$$BC=3x$$

$$CD=2 \cdot 3x=6x \quad \dots\dots$$

1 p

$$AC=AB+BC= x + 3x= 4x$$

$$M \text{ mijlocul } AC \Rightarrow AM=\frac{AC}{2}=2x \quad \dots\dots$$

1 p

$$AD=AB+BC+CD= x + 3x + 6x =10x$$

$$N \text{ mijlocul } AD \Rightarrow AN=\frac{AD}{2}=5x \quad \dots\dots$$

1 p

$$MN =AN-AM=5x-2x=3x \quad |$$

$$MN=15 \text{ cm} \quad | \quad \Rightarrow 3x=15 \text{ cm} \quad \dots\dots$$

1 p

$$x=5 \text{ cm} \quad \Rightarrow \quad AB=5 \text{ cm}$$

1 p

$$BC=3 \cdot 5=15 \text{ cm}$$



1 p

$$CD=6 \cdot 5=30 \text{ cm}$$

.....

4. Se dau unghiurile adiacente $\angle AOB$ și $\angle BOC$, astfel încât bisectoarele lor $[OM$, respectiv $[ON$, formează un unghi de 73° și $3 \cdot m(\angle BOC) = 2 \cdot m(\angle AOB)$.

a) Determinați măsurile unghiurilor $\angle AOB$ și $\angle BOC$.

b) Dacă $OP \perp OM$ astfel încât M și P sunt de aceeași parte cu B față de AO , demonstrați că $[OP$ este bisectoarea unghiului $\angle CON$.

RMT 2010

Barem de notare

a) Notăm $m(\angle AOM) = m(\angle MON) = x$ și $m(\angle BON) = m(\angle NOC) = y$ (exprimate în grade). 1p

$$x + y = 75, 3 \cdot 2y = 2 \cdot 2x \Rightarrow y = 30, x = 45 \dots\dots\dots 2p$$

$$\Rightarrow m(\angle AOB) = 90^\circ, m(\angle BOC) = 60^\circ \dots\dots\dots 1p$$

$$b) OP \perp OM \Rightarrow m(\angle MOP) = 90^\circ \dots\dots\dots 1p$$

Cum $[ON$ este bisectoare $\Rightarrow m(\angle NOC) = 30^\circ$.

Deducem $m(\angle MOC) = 180^\circ - m(\angle AOM) = 105^\circ$, $m(\angle COP) = m(\angle MOC) - m(\angle MOP) = 15^\circ \Rightarrow [OP$
bisectoarea unghiului $\angle CON \dots\dots\dots 2p$