

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ
26.02.2017
BAREM
CLASA a VII-a

Subiectul I: Să se determine numerele naturale $\overline{abcd}$ și n , știind că
 $\sqrt{abcd} = 1 + 2 + 3 + \dots + n$

Soluție: $1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$ 1p

$1000 \leq \overline{abcd} < 10000 \Rightarrow 31 < \sqrt{abcd} < 100$ 1p

$31 < \frac{n(n+1)}{2} < 100 \Rightarrow 62 < n(n+1) < 200$ 1p

$n \in \{8, 9, 10, 11, 12, 13\}$ 2p

Scrierea soluțiilor

$(\overline{abcd}, n) \in \{(1296, 8), (2025, 9), (3025, 10), (4356, 11), (6084, 12), (8281, 13)\}$ 2p

Subiectul II: Se consideră numerele naturale distincte și nenule m, n, p astfel încât

$\frac{4}{m+1} + \frac{9}{m+n} + \frac{30}{m+n+p} \geq 10$. a) Să se arate că m nu este mai mare egal decât 3. b) Să se determine numerele m, n, p .

Soluție: a) Presupunem prin reducere la absurd că $m \geq 3$ 1p

Vom avea atunci $m+1 \geq 4$, $m+n \geq 4$ și $m+n+p \geq 6$ 1p

$\frac{4}{m+1} + \frac{9}{m+n} + \frac{30}{m+n+p} \leq \frac{4}{4} + \frac{9}{4} + \frac{30}{6} = \frac{33}{4} < 10$ Contradicție. Rezultă $m \leq 2$ 1p

b) Cazul I . $m=1$.

Prin reducere la absurd se arată că $n \leq 2$ 1p

$n \neq m \Rightarrow n=2$ și apoi $p=3$ 1p

Cazul II . $m=2$

Prin reducere la absurd se arată că $n \leq 2$ 1p

$n \neq m \Rightarrow n=1$ și $p \leq 2$ deci, în acest caz nu avem soluții.....1p

Subiectul III: Se consideră triunghiul dreptunghic ABC cu $m(\angle BAC) = 90^\circ$. Bisectoarea (CE a unghiului $\angle ACB$ intersectează înălțimea AD în punctul G , $E \in AB$, $D \in BC$ iar punctul F este proiecția punctului E pe dreapta BC . a) Să se arate că $AEFG$ este romb. b) Dacă triunghiul AEG este echilateral să se determine raportul dintre aria rombului $AEFG$ și aria triunghiului ABC .

Soluție: $\triangle AEG$ isoscel $\Rightarrow (AG) \equiv (AE)$ 1p

$\triangle AEC \equiv \triangle FEC \Rightarrow (AE) \equiv (EF)$ 1p

$AG \parallel EF$ și $AGFE$ este romb.....1p

b) $\triangle AEG$ echilateral $\Rightarrow m(\angle ACB) = 60^\circ$ și $m(\angle ABC) = 30^\circ$ 1p

(AF) mediană în $\triangle ABC$ și G centrul de greutate al triunghiului ACF 1p

$A_{AGFE} = 2A_{AGF} = 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot A_{ACF} = \frac{1}{3} \cdot A_{ABC}$ 2p

Subiectul IV: Pe latura (BC) a triunghiului ABC se construiește în exteriorul triunghiului dreptunghiul, $BCDE$. Perpendicularele din E și D pe AC , respectiv AB , se intersectează în F . Perpendicularele din D și E pe AC , respectiv AB , se intersectează în G . a) Să se arate că $AF \perp BC$. b) Dacă O mijlocul segmentului (AG) punctul O este pe mediatoarea segmentului (BC).

Soluție : Fie H astfel încât $BEFH$ este paralelogram .

$BE \parallel HF$, $(BE) \equiv (HF)$ și $BE \parallel CD$, $(BE) \equiv (CD) \Rightarrow CDFH$ paralelogram.....1p

$BH \perp AC$ și $CH \perp AB$ 1p

H ortocentrul $\triangle ABC$ și $AH \perp BC$ 1p

A, H, F coliniare și concluzia1p

b) $EFDG$ paralelogram și

$FG \cap DE = \{M\} \Rightarrow M$ este mijlocul segmentelor (FG) și (DE)1p

(OM) linie mijlocie în $\triangle AFG$ 1p

OM mediatoarea segmentului (DE) și a segmentului (BC)1p