

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

ETAPA LOCALĂ, 17 FEBRUARIE 2018

CLASA a VII -a

BAREM DE CORECTERE

Problema 1

Este dat următorul șir de numere:

$$a_1 = 1 + 1^{-1}, a_2 = 1 + 2^{-1}, a_3 = 1 + 3^{-1}, \dots, a_{2016} = 1 + 2016^{-1}.$$

a) Compară a_{2016} cu a_{2011} .

b) Arată că produsul $a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot \dots \cdot a_{2016}$ este un număr natural.

c) Determină numărul $n \in \mathbb{N}^*$, pentru care $a_n \cdot a_{n+1} \cdot a_{n+2} \in \mathbb{N}$.

Subiectul 1

a) $a_{2011} = 1 + 2011^{-1} = 1 + \frac{1}{2011} > 1 + \frac{1}{2016} = 1 + 2016^{-1} = a_{2016} \Rightarrow a_{2011} > a_{2016}$ 2 p

b) $a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_{2016} = (1 + 1) \left(1 + \frac{1}{2}\right) \left(1 + \frac{1}{3}\right) \left(1 + \frac{1}{4}\right) \cdot \dots \cdot \left(1 + \frac{1}{2016}\right) =$
 $= 2 \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{4}{3} \cdot \dots \cdot \frac{2017}{2016} = 2017 \in \mathbb{N}$ 2 p
 1p

c) $a_n \cdot a_{n+1} \cdot a_{n+2} = \left(1 + \frac{1}{n}\right) \left(1 + \frac{1}{n+1}\right) \left(1 + \frac{1}{n+2}\right) = \frac{n+1}{n} \cdot \frac{n+2}{n+1} \cdot \frac{n+3}{n+2} = \frac{n+3}{n} = 1 + \frac{3}{n} \in \mathbb{N}$
 $\Rightarrow n \in \{1, 3\}$ 2p

Problema 2.

a) Să se calculeze $p = \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{6}} + \frac{\sqrt{4}-\sqrt{3}}{\sqrt{12}} + \dots + \frac{\sqrt{n}-\sqrt{n-1}}{\sqrt{n(n-1)}}$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$.

b) Să se arate că: $8 < \frac{3}{\sqrt{2}} + \frac{5}{\sqrt{6}} + \frac{7}{\sqrt{12}} + \frac{9}{\sqrt{20}} < 12$.

Soluție

a) $\frac{\sqrt{k}-\sqrt{k-1}}{\sqrt{k(k-1)}} = \frac{1}{\sqrt{k-1}} - \frac{1}{\sqrt{k}}$, $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$1p

$p = 1 - \frac{1}{\sqrt{n}}$, $n \geq 2$2p

b) $2 < \frac{3}{\sqrt{2}}$, $2 < \frac{5}{\sqrt{6}}$, $2 < \frac{7}{\sqrt{12}}$, $2 < \frac{9}{\sqrt{20}} \Rightarrow 8 < s$2p

$\frac{3}{\sqrt{2}} < 4$, $\frac{5}{\sqrt{6}} < 4$, $\frac{7}{\sqrt{12}} < 4$, $\frac{9}{\sqrt{20}} < 4 \Rightarrow s < 12$2p

Problema 3

Fie ABCD trapez cu $AB \parallel CD$ și $CD = 2AB$. Considerăm punctul M mijlocul segmentului (CD) și $AC \cap BM = \{P\}$. Știind că aria trapezului ABCD este egală cu 36 cm^2 , calculați aria triunghiului PMC.

Notăm $AB = x \Rightarrow CD = 2x$

$AB \parallel MC \quad \left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\} \\ AB = MC \quad \Rightarrow \text{AMCB paralelogram} \quad (1\text{p})$

$$A_{\Delta PMC} = \frac{1}{4} \cdot A_{ABCM} \quad (2\text{p})$$

Notăm $d(AB, CD) = h$.

$$\frac{A_{ABCM}}{A_{ABCD}} = \frac{x \cdot h}{\frac{3x \cdot h}{2}} = \frac{2}{3} \quad (1\text{p})$$

$$A_{ABCM} = \frac{2}{3} \cdot A_{ABCD}$$

$$A_{ABCM} = \frac{2}{3} \cdot 36 = 24 \text{ cm}^2 \quad (2\text{p})$$

$$A_{\Delta PCM} = \frac{1}{4} \cdot 24 = 6 \text{ cm}^2 \quad (1\text{p})$$

Problema 4

Fie ABC un triunghi, $D \in (BC)$ și punctele E, F, G astfel încât D este mijlocul lui (AE), B este mijlocul lui (EG) și C este mijlocul lui (EF).

a) Arătați că punctele G, A și F sunt coliniare.

b) Dacă S este aria triunghiului ABC și T este aria triunghiului EFG, iar $S = k \cdot T$, să se determine valoarea lui k.

a) Desen.....1p

Vom demonstra coliniaritatea pe baza axiomei lui Euclid.

Astfel: în ΔGAE , $[BD]$ este linie mijlocie $\Rightarrow GA \parallel BD$ 1p

De asemenea $[DC]$ este linie mijlocie în ΔAEF , deci $AF \parallel CD$ 1p

Deoarece $AG \parallel BC$ și $AF \parallel BC$, rezultă conform axiomei lui Euclid că G-A-F.....1p



b) Fie $EH \perp GF$, H aparține GF , $EH \cap BC = \{T\}$. Deoarece $[BC]$ este linie mijlocie în $\triangle EGF$ rezultă $ET=TH$, $BC = \frac{GF}{2}$ 1p

$$k = \frac{S}{T} = \frac{BC \cdot TH}{2} \cdot \frac{2}{FG \cdot EH} = \frac{GF}{2} \cdot \frac{1}{2 \cdot GF} = \frac{1}{4} \text{2p}$$