

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ**Etapa locală, 22 februarie 2020****Subiect clasa a V-a****PROBLEMA 1**

Calculează corect și află:

(2p) a) *Anul nașterii cinematografe:* suma cifrelor numărului $3 \cdot 10^{211} - 7$.(4p) b) *Anul în care a rulat la cinematograful primul film 3D:*

$$2020^{10} - 2020^9 \cdot 2019 - 2020^8 \cdot 2019 - \dots - 2020 \cdot 2019 - (2^3 + 3^2).$$

(1p) c) Descifrează numerele din text: *Toate cele $111_{(2)}$ volume Hary Potter au fost traduse în peste $11111_{(2)}$ limbi, iar ultimul volum a apărut pe data de $10101_{(2)}$ iulie.* (scrierea numerelor este în baza 2).**PROBLEMA 2**

(4p) a) Determinați numerele naturale de trei cifre distincte care se împart la 5 și au suma cifrelor exact 17.

(3p) b) Aflați restul împărțirii numărului $a = 84^{17} + 42^7 + 14^3$ la 168.**PROBLEMA 3**

(4p) a) Suma a două numere este 744, iar unul dintre ele este cu 39 mai mare decât jumătatea celuilalt. Arătați că diferența celor două numere este un pătrat perfect.

(3p) b) Ionel a cumpărat flori pentru a le oferi colegelor de Valentine's day. Dacă ar oferi câte 3 flori fiecărei colege, ar mai rămâne 8 flori. Dacă ar oferi câte 5 flori, atunci patru colege nu ar primi nicio floare și una ar primi doar 3 flori. Câte flori a cumpărat și câte colege are Ionel?

PROBLEMA 4Determinați numerele naturale n pentru care numărul $2^n + 3^n$ este multiplu al lui 5.

Notă: Toate subiectele sunt obligatorii. Timp de lucru 2 ore. Punctajul maxim acordat fiecărei probleme este de 7 puncte.

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

Etapă locală, 22 februarie 2020

Barem de corectare clasa a V-a

PROBLEMA 1

Cunoști istoria cinematografului? Calculează și află anii care au marcat două evenimente!

(2p) a) *Anul nașterii cinematografului: suma cifrelor numărului $3 \cdot 10^{211} - 7$;*

(4p) b) *Anul în care a rulat la cinematograf primul film 3D:*

$$2020^{10} - 2020^9 \cdot 2019 - 2020^8 \cdot 2019 - \dots - 2020 \cdot 2019 - (2^3 + 3^2).$$

(1p) c) *Descifrează numerele din text: Toate cele $111_{(2)}$ volume Hary Potter au fost traduse în peste $11111_{(2)}$ limbi, iar ultimul volum a apărut pe data de $10101_{(2)}$ iulie. (scrierea numerelor este în baza 2).*

Soluție:

$$\text{a) } 3 \cdot 10^{211} - 7 = \underbrace{3 \cdot 100 \dots 0}_{\text{de 211 ori}} - 7 = \underbrace{300 \dots 0}_{\text{de 211 ori}} - 7 = \underbrace{2999 \dots 93}_{\text{de 210 ori}} \dots \dots \dots 1 \text{ punct}$$

Suma cifrelor este egală cu $2 + 210 \cdot 9 + 3 = 1895 \dots \dots \dots 1 \text{ punct}$

b)

$$\begin{aligned} & \underbrace{2020^{10} - 2020^9 \cdot 2019}_{\text{de 211 ori}} - 2020^8 \cdot 2019 - \dots - 2020 \cdot 2019 - (2^3 + 3^2) \\ &= 2020^9 \cdot (2020 - 2019) - 2020^8 \cdot 2019 - \dots - 2020 \cdot 2019 - 17 \dots \dots \dots 3 \text{ puncte} \\ &= 2020^9 - 2020^8 \cdot 2019 - \dots - 2020 \cdot 2019 - 17 \\ &\dots \\ &= 2020^2 - 2020 \cdot 2019 - 17 = 2020 \cdot (2020 - 2019) - 17 \dots \dots \dots 1 \text{ punct} \\ &= 2020 - 17 = 2003 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c) } 111_{(2)} &= 1 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2 + 1 = 7 \text{ volume în } 11111_{(2)} = 1 \cdot 2^4 + 1 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 = 31 \text{ limbi pe data de} \\ 10101_{(2)} &= 1 \cdot 2^4 + 0 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 = 21 \text{ iulie. } \dots \dots \dots 1 \text{ punct} \end{aligned}$$

(problemă selectată și propusă de prof. Oprea Adonia-Augustina – inspector școlar)

PROBLEMA 2

(4p) a) *Determinați numerele naturale de trei cifre distincte care se împart la 5 și au suma cifrelor exact 17.*

(3p) b) *Aflați restul împărțirii numărului $a = 84^{17} + 42^7 + 14^3$ la 168.*

Soluție:

a) Dacă $\overline{abc}$ este numărul care se împarte la 5 atunci $c = 0$ sau $c = 5 \dots \dots 1 \text{ punct}$

Pentru $c = 0$ din $a + b + c = 17 \Rightarrow a + b = 17$, deci $a = 8, b = 9$ și $a = 9, b = 8 \dots$ 1 punct

Pentru $c = 5$ din $a + b + c = 17 \Rightarrow a + b = 12$, deci $(a = 3, b = 9)$, $(a = 9, b = 3)$, $(a = 4, b = 8)$,
 $(a = 8, b = 4)$ $(a = 5, b = 7)$ iar $(a = 7, b = 5)$ nu convine ($a = c = 5$) și $(a = 6, b = 6)$ nu convine 1 punct

Deci numerele căutate sunt 395, 485, 845, 935, 890, 980 1 punct

(propusă de Școala Gimnazială „Lucian Blaga” Jibou)

b) $168 = 2^3 \cdot 3 \cdot 7$, $84 = 2^2 \cdot 3 \cdot 7$, $42 = 2 \cdot 3 \cdot 7$, deci $a = (2^2 \cdot 3 \cdot 7)^{17} + (2 \cdot 3 \cdot 7)^7 + 14^3 \dots$ 1 punct

$a = 2^{34} \cdot 3^{17} \cdot 7^{17} + 2^7 \cdot 3^7 \cdot 7^7 + 2744 = 2^3 \cdot 3 \cdot 7 (2^{31} \cdot 3^{16} \cdot 7^{16} + 2^4 \cdot 3^6 \cdot 7^6) + 168 \cdot 16 + 56$
 $= 168 (2^{31} \cdot 3^{16} \cdot 7^{16} + 2^4 \cdot 3^6 \cdot 7^6 + 16) + 56$ 1 punct

restul împărțirii numărului a la 168 este egal cu 56 1 punct

(propusă de prof. Nichita Elisabeta – Școala Gimnazială „Silvania” Șimleu Silvaniei)

PROBLEMA 3

(4p) a) Suma a două numere este 744, iar unul dintre ele este cu 39 mai mare decât jumătatea celuilalt. Arătați că diferența celor două numere este un pătrat perfect.

(3p) b) Ionel a cumpărat flori pentru a le oferi colegelor de Valentine's day. Dacă ar oferi câte 3 flori fiecărei colege, ar mai rămâne 8 flori. Dacă ar oferi câte 5 flori, atunci patru colege nu ar primi nicio floare și una ar primi doar 3 flori. Câte flori a cumpărat și câte colege are Ionel.

Soluție:

$$\left. \begin{array}{l} I : 2p \\ II : p + 39 \end{array} \right\} 744, 2p + p + 39 = 744 \dots\dots\dots 1 \text{ punct}$$

$$p = 235 \dots\dots\dots 1 \text{ punct}$$

Primul număr : $235 \cdot 2 = 470$ și al doilea număr : $235 + 39 = 274 \dots\dots\dots 1 \text{ punct}$

Diferența este: $470 - 274 = 196 = 14^2 \dots\dots\dots 1 \text{ punct}$

Obs. Dacă elevii pornesc direct din $3p + 39 = 744$ se va acorda 1 punct, iar tot ce urmează rămâne la fel punctat!

(propusă de prof. Vancea Radu – Liceul Tehnologic „Ioachim Pop” Ileanda)

b) Numărul total de flori se poate reprezenta în fiecare situație astfel:

 ...  + 8 flori, respectiv    ...  - 22 flori
 (20 flori pentru că 4 fete nu au primit nicio floare + 2 flori pentru că o fată a primit doar trei flori).
 2 puncte

Deci numărul colegelor lui Ionel este $(8 + 22) : (5 - 3) = 15$ și numărul florilor cumpărate este egal cu $3 \cdot 15 + 8 = 53 \dots$ 1 punct

Obs. Dacă elevii rezolvă cu metoda algebrică sau cu o altă metodă, cele 3 puncte se vor acorda proporțional cu corectitudinea celor scrise și a valorilor corect identificate.

PROBLEMA 4

Determinați numerele naturale n pentru care numărul $2^n + 3^n$ este multiplu al lui 5.

Soluție:

Calculăm $U(2^n)$: $U(2^n) = 2$, pentru $n = 4k + 1$, $(2^n) = 4$, pentru $n = 4k + 2$, $U(2^n) = 8$,
pentru $n = 4k + 3$ și $U(2^n) = 6$, pentru $n = 4k$ 2 puncte

Calculăm $U(3^n)$: $U(3^n) = 3$, pentru $n = 4k + 1$, $(3^n) = 9$, pentru $n = 4k + 2$, $U(3^n) = 7$,
pentru $n = 4k + 3$ și $U(3^n) = 1$, pentru $n = 4k$ 2puncte

În final pentru $n = 4k + 1$ și $n = 4k + 3 \Rightarrow (2^n + 3^n)$ este multiplu de 5 3 puncte

Obs: Pentru determinarea lui n în câteva cazuri particulare (indiferent câte) se acordă doar 2 puncte.

(problemă selectată din G.M. și propusă de prof. Știrb Ramona – Liceul de Artă „Ioan Sima” Zalău)