

Olimpiada Națională de Matematică
Etapa Locală, județul Timiș
23.02.2018

Clasa a XI-a
Barem de corectare și notare

1. Fie $X = \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}$ și $A = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$ unde $a, b, \alpha \in \mathbf{R}$, $a^2 + b^2 < 1$.

a) Calculați X^n , pentru $\forall n \in \mathbf{N}^*$.

b) Demonstrați că A^n este de forma $\begin{pmatrix} a_n & b_n \\ -b_n & a_n \end{pmatrix}$, $\forall n \in \mathbf{N}^*$.

c) Demonstrați că șirurile $(a_n)_{n \in \mathbf{N}^*}$, $(b_n)_{n \in \mathbf{N}^*}$ sunt convergente și au limita 0.

Soluție:

a) Calculează $X^2 = \begin{pmatrix} \cos 2\alpha & \sin 2\alpha \\ -\sin 2\alpha & \cos 2\alpha \end{pmatrix}$... 1p

Demonstrează prin inducție matematică că $X^n = \begin{pmatrix} \cos n\alpha & \sin n\alpha \\ -\sin n\alpha & \cos n\alpha \end{pmatrix}$, $\forall n \in \mathbf{N}^*$... 2p

b) Notează $a^2 + b^2 = r^2$, $r < 1$, deci $\frac{a^2}{r^2} + \frac{b^2}{r^2} = 1$.

Cu notația $\frac{a}{r} = \cos \alpha$, $\frac{b}{r} = \sin \alpha$ matricea $A = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$ se scrie $A = r \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}$... 1p

Conform lui a) $A^n = \begin{pmatrix} a_n & b_n \\ -b_n & a_n \end{pmatrix}$, $\forall n \in \mathbf{N}^*$ unde $a_n = r^n \cos n\alpha$, $b_n = r^n \sin n\alpha$, $r < 1$... 1p

SAU

presupune că $A^k = \begin{pmatrix} a_k & b_k \\ -b_k & a_k \end{pmatrix}$ pentru $k \in \mathbf{N}^*$, k fixat și calculează $A^{k+1} = A^k \cdot A$

$A^{k+1} = \begin{pmatrix} a_k \cdot a - b_k \cdot b & a_k \cdot b + b_k \cdot a \\ -(a_k \cdot b + b_k \cdot a) & a_k \cdot a - b_k \cdot b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{k+1} & b_{k+1} \\ -b_{k+1} & a_{k+1} \end{pmatrix}$... 1p

conform inducției matematice $A^n = \begin{pmatrix} a_n & b_n \\ -b_n & a_n \end{pmatrix}$, $\forall n \in \mathbf{N}^*$

unde $a_{n+1} = a_n \cdot a - b_n \cdot b$, $b_{n+1} = a_n \cdot b + b_n \cdot a$, $\forall n \in \mathbf{N}^*$ $a_1 = a$, $b_1 = b$... 1p

c) Deoarece $(a_n)_{n \in \mathbf{N}^*}$ $a_n = r^n \cos n\alpha$, $(b_n)_{n \in \mathbf{N}^*}$ $b_n = r^n \sin n\alpha$ și $r < 1$, obține că $r^n \rightarrow 0$... 1p

și cum $\cos n\alpha \in [-1, 1]$ și $\sin n\alpha \in [-1, 1]$ obține că $(a_n)_{n \in \mathbf{N}^*}$, $(b_n)_{n \in \mathbf{N}^*}$ converg la 0 ... 1p

2. Rezolvați în $M_2(\mathbf{R})$ ecuația $X^3 = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 4 & 17 \end{pmatrix}$.

Soluție:

Deduce că $Tr(X^3) = 18$ și că $\det(X) = 1$... 1p

scrie relația $X^2 - Tr(X)X + \det(X)I_2 = O_2$ adică $X^2 = tX - I_2$ unde s-a notat $t = Tr(X)$... 1p

din care obține că $X^3 = tX^2 - X \Leftrightarrow X^3 = t(tX - I_2) - X \Leftrightarrow X^3 = (t^2 - 1)X - tI_2$ (*) ... 1p

și utilizând proprietățile $Tr(A+B) = Tr(A) + Tr(B)$ și $Tr(kA) = kTr(A)$... 1p

din (*) obține $Tr(X^3) = (t^2 - 1)Tr(X) - tTr(I_2) \Leftrightarrow 18 = (t^2 - 1)t - 2t \Leftrightarrow t^3 - 3t - 18 = 0 \Leftrightarrow t = 3$ 1p

deci relația (*) devine $X^3 = 8X - 3I_2$ și ecuația se rescrie $8X - 3I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 4 & 17 \end{pmatrix}$... 1p

de unde $X = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$... 1p

SAU

deduce că $Tr(X^3) = 18$ și că $\det(X) = 1$... 1p

notează $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ și înmulțind ecuația la stânga și la dreapta cu X obține egalitatea

$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 4 & 17 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 4 & 17 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ de unde deduce că $X = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a + 4b \end{pmatrix}$... 1p

scrie relația $X^2 - Tr(X)X + \det(X)I_2 = O_2$ adică $X^2 = tX - I_2$ unde s-a notat $t = Tr(X)$... 1p

din care obține că $X^3 = tX^2 - X \Leftrightarrow X^3 = t(tX - I_2) - X \Leftrightarrow X^3 = (t^2 - 1)X - tI_2$ (*) ... 1p

și utilizând proprietățile $Tr(A+B) = Tr(A) + Tr(B)$ și $Tr(kA) = kTr(A)$... 1p

din (*) obține $Tr(X^3) = (t^2 - 1)Tr(X) - tTr(I_2) \Leftrightarrow 18 = (t^2 - 1)t - 2t \Leftrightarrow t^3 - 3t - 18 = 0 \Leftrightarrow t = 3$ 1p

din relațiile $a + 5b = 3$ (1) (urma matricei X) și $a^2 + 4ab - b^2 = 1$ (2) (determinantul matricei X)

obține $a = \frac{1}{2}, b = \frac{1}{2}$ deci $X = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$... 1p

3. Fie șirul $(x_n)_{n \in \mathbf{N}^*}$ astfel încât $x_1 \in \left(0, \frac{1}{3}\right)$ și $x_{n+1} = x_n - 3x_n^2$, $\forall n \in \mathbf{N}^*$. Arătați că :

a) șirul $(x_n)_{n \in \mathbf{N}^*}$ este convergent la zero.

b) $\lim_{n \rightarrow \infty} nx_n = \frac{1}{3}$

Soluție:

a) $x_{n+1} - x_n = -3x_n^2 < 0$ deci $(x_n)_{n \in \mathbf{N}^*}$ este un șir strict descrescător (1) și $x_n < \frac{1}{3} \forall n \in \mathbf{N}^*$... 1p

Presupune că $x_k > 0$ pentru $k \in \mathbf{N}^*$, k fixat și demonstrează că $x_{k+1} = x_k(1 - 3x_k) > 0$ deci conform

inducției matematice $x_n > 0 \forall n \in \mathbf{N}^*$ adică $(x_n)_{n \in \mathbf{N}^*}$ este un șir mărginit inferior (2) ... 1p

din (1) și (2) conform teoremei lui Weierstrass rezultă că șirul $(x_n)_{n \in \mathbf{N}^*}$ este convergent ... 1p

notează L limita finită a șirului convergent $(x_n)_{n \in \mathbf{N}^*}$ și trece la limită în relația de recurență

obține $L = L - 3L^2$ de unde unica soluție este $L = 0$ deci șirul are limita zero ... 1p

b) Se aplică criteriul Cesaro-Stolz $\lim_{n \rightarrow \infty} nx_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\frac{1}{x_n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1-n}{\frac{1}{x_{n+1}} - \frac{1}{x_n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n \cdot x_{n+1}}{x_n - x_{n+1}}$... 2p

Utilizează formula de recurență și obține $\lim_{n \rightarrow \infty} nx_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n(x_n - 3x_n^2)}{x_n - (x_n - 3x_n^2)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - 3x_n}{3} = \frac{1}{3}$... 1p

4. a) Utilizând eventual identitatea $\sin x = \sin \frac{x}{3} \left(3 - 4\sin^2 \frac{x}{3} \right)$, arătați că $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^3} = \frac{1}{6}$.

b) Dacă $L_n = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{n!x^n - \sin x \sin 2x \dots \sin nx}{x^{n+2}}$, $\forall n \in \mathbf{N}^*$, arătați că $L_n = n! \cdot \frac{n^2}{6} + nL_{n-1}$, $\forall n \geq 2$.

c) Demonstrați că $L_n = \frac{n(2n+1)(n+1)!}{36}$, $\forall n \in \mathbf{N}^*$.

Soluție:

a) notează $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^3} = L_1$ și utilizând identitatea trigonometrică obține

$$L_1 = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin \frac{x}{3} \left(3 - 4\sin^2 \frac{x}{3} \right)}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - 3\sin \frac{x}{3}}{x^3} + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4\sin^3 \frac{x}{3}}{x^3} = \frac{3}{27} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{x}{3} - \sin \frac{x}{3}}{\frac{x^3}{27}} + \frac{4}{27} = \dots 1p$$

de unde obține ecuația $L_1 = \frac{1}{9}L_1 + \frac{4}{27} \Leftrightarrow \frac{8}{9}L_1 = \frac{4}{27} \Leftrightarrow L_1 = \frac{1}{6}$ 1p

$$\begin{aligned} \text{b) } L_n &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{n!x^n - \sin x \sin 2x \sin 3x \dots \sin nx}{x^{n+2}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{n!x^n - \frac{\sin x}{x} \frac{\sin 2x}{2x} \frac{\sin 3x}{3x} \dots \frac{\sin nx}{nx} \cdot n!x^n}{x^{n+2}} = \\ &= n! \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \frac{\sin x}{x} \frac{\sin 2x}{2x} \frac{\sin 3x}{3x} \dots \frac{\sin nx}{nx}}{x^2} = \dots \quad 1\text{p} \end{aligned}$$

$$= n! \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \frac{\sin nx}{nx} + \frac{\sin nx}{nx} - \frac{\sin x}{x} \frac{\sin 2x}{2x} \frac{\sin 3x}{3x} \dots \frac{\sin nx}{nx}}{x^2} = \dots \quad 1\text{p}$$

$$= n! \cdot \left(\lim_{x \rightarrow 0} \frac{nx - \sin nx}{nx^3} + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\sin nx}{nx} \left(1 - \frac{\sin x}{x} \frac{\sin 2x}{2x} \frac{\sin 3x}{3x} \dots \frac{\sin(n-1)x}{(n-1)x} \right)}{x^2} \right) = \dots \quad 1\text{p}$$

$$= n! \cdot \left(\frac{n^2}{6} + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \frac{\sin x}{x} \frac{\sin 2x}{2x} \frac{\sin 3x}{3x} \dots \frac{\sin(n-1)x}{(n-1)x}}{x^2} \right) = n! \cdot \frac{n^2}{6} + nL_{n-1} \quad \dots \quad 1\text{p}$$

$$\text{c) Utilizează formula de recurență } L_n = n! \cdot \frac{n^2}{6} + nL_{n-1} \text{ și obține } L_n = \frac{n(2n+1)(n+1)!}{36} \quad \dots \quad 1\text{p}$$