

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ, 16 FEBRUARIE 2019
CLASA A IX-A, SOLUȚII ȘI BAREME ORIENTATIVE

1. Pentru orice numere reale pozitive a, b, c arătați că $\frac{a^3}{b+c} + \frac{b^3}{c+a} + \frac{c^3}{a+b} \geq \frac{a^2+b^2+c^2}{2}$.

Gazeta Matematică

Soluție:

$$\frac{a^3}{b+c} + \frac{b^3}{c+a} + \frac{c^3}{a+b} = \frac{a^4}{ab+ac} + \frac{b^4}{bc+ba} + \frac{c^4}{ca+cb} \geq \frac{(a^2+b^2+c^2)^2}{2(ab+ac+bc)} \dots\dots\dots 4p$$

$$\frac{(a^2+b^2+c^2)^2}{2(ab+ac+bc)} \geq \frac{a^2+b^2+c^2}{2}, \text{ deoarece } a^2+b^2+c^2 \geq ab+ac+bc \dots\dots\dots 3p$$

2. Arătați că $16^n + 4^n - 2$ se divide cu 9, pentru orice număr natural n .

Florin Rotaru, Focșani

Soluție:

Fie $a_n = 16^n + 4^n - 2$. Avem $a_0 = 0 : 9 \dots\dots\dots 1p$

Din $a_{n+1} = 16 \cdot 16^n + 4^{n+1} - 2 = 16(a_n - 4^n + 2) + 4 \cdot 4^n - 2 = 16a_n + 27 + 3(1 - 4^{n+1}) \dots\dots\dots 5p$

și din $(1 - 4^{n+1}) : 3 \Rightarrow a_{n+1} : 9 \dots\dots\dots 1p$

3. Demonstrați că $\left(\frac{1}{3} - x\right)(x-1) \leq [x]^2 + \{x\}^2$, pentru orice număr real x .

Valentin Florin Damian, Brăila

Soluție:

$$x^2 + [x]^2 + \{x\}^2 \geq \frac{(x + [x] + \{x\})^2}{3} = \frac{4x^2}{3} \geq \frac{4x-1}{3} \dots\dots\dots 5p$$

$$x^2 + [x]^2 + \{x\}^2 \geq \frac{4x-1}{3} \Leftrightarrow [x]^2 + \{x\}^2 \geq \frac{4x-1-3x^2}{3} = \left(\frac{1}{3}-x\right)(x-1) \dots\dots\dots 2p$$

4. Fie H ortocentrul triunghiului ascuțitunghic ABC și punctele A' , B' , C' simetricele punctelor A , B , respectiv C față de punctul H . Demonstrați că, dacă triunghiurile ABC și $A'B'C'$ au același centru de greutate, atunci triunghiul ABC este echilateral.

Valentin Florin Damian, Brăila

Soluție:

$$\overrightarrow{AC'} = \overrightarrow{AH} + \overrightarrow{CH}, \overrightarrow{BA'} = \overrightarrow{BH} + \overrightarrow{AH}, \overrightarrow{CB'} = \overrightarrow{CH} + \overrightarrow{BH} \dots\dots\dots 2p$$

$$\text{Triunghiurile } ABC \text{ și } A'B'C' \text{ au același centru de greutate} \Rightarrow \overrightarrow{AC'} + \overrightarrow{BA'} + \overrightarrow{CB'} = \vec{0} \dots\dots\dots 2p$$

$$\overrightarrow{AC'} + \overrightarrow{BA'} + \overrightarrow{CB'} = 2(\overrightarrow{AH} + \overrightarrow{CH} + \overrightarrow{BH}) = 4\overrightarrow{OH} \dots\dots\dots 2p$$

$$\text{Obținem } \overrightarrow{OH} = \vec{0} \Rightarrow ABC \text{ echilateral} \dots\dots\dots 1p$$