

Barem de corectare OLM 2020 Clasa a X-a

P1 – autor Dan Nedeianu (GM 10/2019)

$1 - 3\sqrt[3]{2} + 2\sqrt[3]{4} = (\sqrt[3]{2} - 1)(2\sqrt[3]{2} - 1)$ $1 + 3\sqrt[3]{2} + 2\sqrt[3]{4} = (\sqrt[3]{2} + 1)(2\sqrt[3]{2} + 1)$	2p
După raționalizare $\frac{5}{1 - 3\sqrt[3]{2} + 2\sqrt[3]{4}} = \frac{(\sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{2} + 1)(4\sqrt[3]{4} + 2\sqrt[3]{2} + 1)}{3}$	1p
După raționalizare $\frac{17}{1 + 3\sqrt[3]{2} + 2\sqrt[3]{4}} = \frac{(\sqrt[3]{4} - \sqrt[3]{2} + 1)(4\sqrt[3]{4} - 2\sqrt[3]{2} + 1)}{3}$	1p
După efectuarea calculelor, valoarea expresiei este $8 \in \mathbb{N}$	3p

P2 - manual

$\frac{a+b+c}{3} \geq \sqrt[3]{abc}, \forall a, b, c \in (1, +\infty)$	2p
$a > 1 \Rightarrow \log_a \frac{a+b+c}{3} \geq \log_a \sqrt[3]{abc} = \frac{1}{3}(1 + \log_a b + \log_a c)$ și analoagele	2p
$a, b > 1 \Rightarrow \log_a b > 0$, deci $\log_a b + \log_b a \geq 2$ și analoagele	2p
$\log_a \frac{a+b+c}{3} + \log_b \frac{a+b+c}{3} + \log_c \frac{a+b+c}{3} \geq \frac{1}{3}(3 + 2 + 2 + 2) = 3$	1p

P3 - autor Martin Bottesch

a) Presupunem f injectivă; atunci $f(1) \neq f(-1)$, deci $f(f(1)) \neq f(f(-1))$, contradicție. Deci f nu este injectivă.	2p
Presupunem f surjectivă; atunci $\exists y \in \mathbb{R}$ astfel încât $f(y) = -1$ și $\exists x \in \mathbb{R}$ astfel încât $f(x) = y$. $f(f(x)) = -1$, contradicție. Deci f nu este surjectivă.	2p
b) Un exemplu este $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x ^{\sqrt{2}}$.	3p

P4

a) $ z_1 + z_2 ^2 + z_1 - z_2 ^2 = 2(z_1 ^2 + z_2 ^2) = 4 \Rightarrow z_1 = 1$	3p
b) $z_1 = a + bi, z_2 = c + di, a, b, c, d \in \mathbb{R}$, atunci $\frac{ z_1 + z_2 ^2 - z_1 - z_2 ^2}{4} = \frac{1}{2} = ac + bd$	1p
$1 = (a^2 + b^2)(c^2 + d^2) = (ac + bd)^2 + (ad - bc)^2$	2p
Deci $ad - bc = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$ și $\operatorname{Re} z_1 \cdot \operatorname{Im} z_2 - \operatorname{Re} z_2 \cdot \operatorname{Im} z_1 = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$	1p